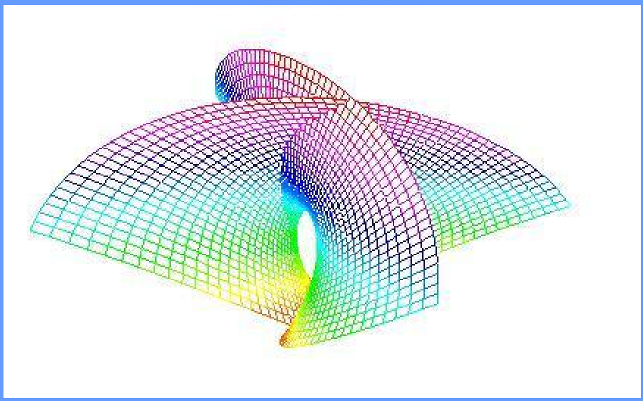
Smarandache 问 题

新 进 展

陈国慧著



High American Press

2007

Smarandache 问 题

新 进 展

陈国慧

海南师范大学数学系

Chen Guohui

Department of Mathematics, Hainan Normal University

Haikou,　Hainan, 571158 P. R. China

High American Press

2007

This book can be ordered in a paper bound reprint from:

Books on Demand
ProQuest Information & Learning
(University of Microfilm International)
300 N. Zeeb Road
P.O. Box 1346, Ann Arbor
MI 48106-1346, USA
Tel.: 1-800-521-0600 (Customer Service)
http://wwwlib.umi.com/bod/basic

Peer Reviewers:
Wenpeng Zhang, Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an, Shannxi , P.R.China.
Wenguang Zhai, Department of Mathematics, Shangdong Teachers' University, Jinan, Shandong , P.R.China.
Guodong Liu, Department of Mathematics, Huizhou University, Huizhou,Guangdong, P.R.China.

Many books can be downloaded from the following **Digital Library of Science**:
http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/eBooks-otherformats.htm

ISBN: 978-1-59973-043-1

Standard Address Number: 297-5092
Printed in the United States of America

前　言

数论这门学科最初是从研究整数开始的, 所以叫整数数论. 后来整数数论又进一步发展, 就叫做数论了. 确切地说, 数论就是一门研究整数性质的学科. 数论和几何学一样, 是古老的数学分支.

数论在数学中的地位是特殊的, 高斯曾经说过:“数学是科学的皇后, 数论是数学中的皇冠”. 虽然数论中的许多问题在很早就开始了研究, 并得到了丰硕的成果, 但是至今仍有许多被数学家称之为“皇冠上的明珠”的悬而未解的问题等待人们去解决. 正因如此, 数论才能不断地充实和发展, 才能既古老又年轻, 才能始终活跃在数学领域的前沿.

初等数论所包含的一个重要内容是研究数论函数的各种性质, 而著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 是重要的数论函数之一, 它是由美籍罗马尼亚著名数论专家 F.Smarandache 教授首先提出的. 此外, 在 1991 年美国研究出版社出版的《只有问题，没有解答》一书中, F.Smarandache 教授提出了 105 个关于特殊数列、算术函数等未解决的数学问题及猜想. 随着这些问题的提出, 许多学者对此进行了深入的研究, 并获得了不少具有重要理论价值的研究成果!

本书是作者在西北大学访问期间, 根据导师张文鹏教授的建议, 将目前中国学者关于 Smarandache 问题的部分研究成果汇编成册, 其主要目的在于向读者介绍关于 Smarandache 问题的一些最新的研究成果, 主要包括 Smarandache 函数及相关函数的渐近性质、级数收敛问题、特殊方程的解等一系列问题, 并提出了关于这些函数的一些新的问题, 有兴趣的读者可以对这些问题进行研究, 从而开拓读者的视野, 引导和激发读者对这些领域的研究兴趣.

在本书的编写过程中, 得到了张文鹏教授的各位研究生的大力支持和帮助, 在此表示感谢. 另外, 还要特别感谢张沛硕士为本书的编写及打印所付出的艰苦努力. 最后对我的导师张文鹏教授的热情鼓励, 详细地审阅全书并提出许多宝贵意见致以深深的谢意!

编者

2007 年 8 月

目录

第一章 Smarandache 函数

当自变量 n 在某个整数集合中取值时, 因变量 y 取复数值的函数 $y=f(n)$ 称为数论函数或算术函数. 由于许多数论或组合数学中的问题均可化为一些数论函数来讨论, 所以数论函数是一类非常重要的函数, 是数论中的一个重要研究课题, 是研究各种数论问题中不可缺少的工具. 而数论研究的一个重要内容是数论函数的性质, 如函数的均值问题, 我们知道有许多数论函数的取值是很不规则的, 例如 $\phi(n)$, $d(n)$, $\mu(n)$ 等等, 但是这些数论函数的均值 $\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n\le x}f(n)$ 往往具有良好的性质. 本章主要研究了一些关于 Smarandache 函数及其复合函数的均值问题, 以及包含 Smarandache 函数的一些特殊方程的求解问题.

1.1 引言

首先, 我们给出几个相关函数的定义

定义 1.1 对任意正整数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n|m!$, 即 $S(n)=\min\{m:\ n|m!,\ m\in N\}$.

定义 1.2 对任意正整数 n, Dirichlet 除数函数 $d(n)$ 表示 n 的正因子个数, 即

$$d(n)=\sum_{d|n}1.$$

定义 1.3 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 k 使得 $n\le k(k+1)/2$, 即

$$Z(n)=\min\{k:\ n\le k(k+1)/2\}.$$

它是罗马尼亚著名数论专家Jozsef Sandor教授引入的.

定义 1.4 对任意正整数 n, 函数 $SM(n)$ 定义为: 当 $n=1$ 时, $SM(1)=1$; 当 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式时,

$$SM(n)=\max\{\alpha_1p_1,\ \alpha_2p_2,\ \alpha_3p_3,\ \cdots,\ \alpha_kp_k\}.$$

容易验证函数 $SM(n)$ 是 Smarandache 可乘函数.

定义 1.5 对任意正整数 n 及任意给定的整数 $k\ge 2$, 则 n 的 k 次补数 $a_k(n)$ 定义为最小的正整数 m, 使得乘积 $m\cdot n$ 为完全 k 次方幂.

其次，我们再给出 Smarandache 函数的一些性质. 为方便起见, 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解式.

性质 1.1 对任意正整数 n, 我们有

$$S(n)=\max_{1\le i\le k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}.$$

特别地，$S(p)=p$.

性质 1.2 如果 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子, 即 $P(n)=\max\{p_1,\ p_2,\cdots,\ p_k\}$, 并且当 $P(n)>\sqrt{n}$ 时有

$$S(n)=P(n).$$

证明: 根据 $P(n)$ 的定义及条件 $P(n)>\sqrt{n}$, 我们有

$$S(P(n))=P(n).$$

对于 n 的其它素因子 p_i ($1\le i\le k$ 和 $p_i\ne P(n)$), 则有

$$S(p_i^{\alpha_i})=\alpha_i p_i.$$

下面我们分三种情况来讨论 $S(p_i^{\alpha_i})$ 的上界

(1) 当 $\alpha_i=1$ 时, $S(p_i)=p_i\le\sqrt{n}$.

(2) 当 $\alpha_i=2$ 时, $S(p_i^2)=2p_i\le 2\cdot n^{\frac{1}{4}}\le\sqrt{n}$.

(3) 当 $\alpha_i\ge 3$ 时, $S(p_i^{\alpha_i})=\alpha_i\cdot p_i\le\alpha_i\cdot n^{\frac{1}{2\alpha_i}}\le n^{\frac{1}{2\alpha_i}}\cdot\dfrac{\ln n}{\ln p_i}\le\sqrt{n}$, 这里我们利用了当 $p^\alpha|n$ 时有 $\alpha\le\dfrac{\ln n}{\ln p}$.

由 (1)-(3), 容易得到

$$S(p_i^{\alpha_i})\le\sqrt{n}.$$

综上所述, 我们有

$$S(n)=\max_{1\le i\le k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}=S(P(n))=P(n).$$

于是完成了性质的证明.

性质 1.3 $S(p^\alpha)$ 的上下界估计为

$$(p-1)\alpha+1\le S(p^\alpha)\le(p-1)[\alpha+1+\log_p\alpha]+1.$$

性质 1.4 $S(n)$ 函数均值的渐近公式

$$\sum_{n\le x}S(n)=\frac{\pi^2}{12}\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

证明: 我们把所有正整数分为两个集合 A 和 B:

$$A=\{n|n\le x,P(n)\le\sqrt{n}\},\qquad B=\{n|n\le x,P(n)>\sqrt{n}\}.$$

根据 Euler 求和公式及性质 1.2 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A} S(n) &\ll \sum_{n\leq x}\sqrt{n}\ln n\\ &= \int_1^x \sqrt{t}\ln t dt + \int_1^x (t-[t])(\sqrt{t}\ln t)' dt + \sqrt{x}\ln x(x-[x])\\ &\ll x^{\frac{3}{2}}\ln x.\end{aligned}$$

同样地, 根据 Abel 求和公式有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in B} S(n) &= \sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)>\sqrt{n}}} P(n) = \sum_{n\leq\sqrt{x}}\sum_{n\leq p\leq\frac{x}{n}} p\\ &= \sum_{n\leq\sqrt{x}}\sum_{\sqrt{x}\leq p\leq\frac{x}{n}} p + O\left(\sum_{n\leq\sqrt{x}}\sum_{n\leq p\leq\frac{x}{n}}\sqrt{x}\right)\\ &= \sum_{n\leq\sqrt{x}}\left(\frac{x}{n}\pi\left(\frac{x}{n}\right) - \sqrt{x}\pi(\sqrt{x}) - \int_{\sqrt{x}}^{\frac{x}{n}}\pi(s)ds\right) + O\left(x^{\frac{3}{2}}\ln x\right),\end{aligned}$$

其中 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数的个数. 注意到

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right),$$

则由上式有

$$\begin{aligned}\sum_{\sqrt{x}\leq p\leq\frac{x}{n}} p &= \frac{x}{n}\pi\left(\frac{x}{n}\right) - \sqrt{x}\pi(\sqrt{x}) - \int_{\sqrt{x}}^{\frac{x}{n}}\pi(s)ds\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{n^2\ln x/n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\ln\sqrt{x}} + O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^2 x/n}\right)\\ &\quad + O\left(\frac{x}{\ln^2\sqrt{x}}\right) + O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^2 x/n} - \frac{x}{\ln^2\sqrt{x}}\right).\end{aligned}$$

因而, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{x^2}{n^2\ln x/n} &= \sum_{n\leq\ln^2 x}\frac{x^2}{n^2\ln x/n} + O\left(\sum_{\ln^2 x\leq n\leq\sqrt{x}}\frac{x^2}{n^2\ln x}\right)\\ &= \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{x^2}{\ln x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)\end{aligned}$$

和

$$\sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{x^2}{n^2\ln^2 x/n} = O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

综上所述, 则

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} S(n) &= \sum_{n\in A} S(n)+\sum_{n\in B} S(n)\\ &= \frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).\end{aligned}$$

于是完成了性质的证明.

性质 1.5 对任意的素数 p 和满足 $1\le k<p$ 的正整数 k 及多项式 $f(x)=x^{n_k}+x^{n_{k-1}}+\cdots+x^{n_1}$ $(n_k>n_{k-1}>\cdots>n_1)$, 有

$$S(p^{f(p)})=(p-1)f(p)+pf(1).$$

特别地,

$$S\left(p^{kp^n}\right)=k\left(\phi(p^n)+\frac{1}{k}\right)p,$$

其中 $\phi(n)$ 是 Euler 函数.

性质 1.6 设 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子, 则对任意实数 $x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数.

性质 1.7 对任意固定的正整数 k 及任意实数 $x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)S(n)=x^2\sum_{i=0}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中 $\Lambda(n)$ 是 Mangoldt 函数, $c_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 是常数, 并且 $c_0=1$.

1.2 $S(n)$ 函数和 $d(n)$ 函数的混合均值

本节主要研究一个包含 Smarandache 函数 $S(n)$ 与 Dirichlet 除数函数 $d(n)$ 的混合均值问题, 给出一个较强的渐近公式. 即要证明下面的

定理 1.2.1 设 $k\ge 2$ 为给定的整数, 则对任意实数 $x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}S(n)\cdot d(n)=\frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中 $d(n)$ 为 Dirichlet 除数函数, c_i $(i=2,\ 3,\cdots,\ k)$ 为可计算的常数.

证明: 事实上, 在和式

$$\sum_{n\le x}S(n)\cdot d(n) \tag{1-1}$$

中, 我们将所有 $1 \le n \le x$ 的正整数 n 分为两个集合 A 与 B, 其中集合 A 包含所有那些满足存在素数 p 使得 $p|n$ 且 $p > \sqrt{n}$ 的正整数 n; 而集合 B 包含区间 $[1,\ x]$ 中不属于集合 A 的那些正整数. 于是利用性质 1.1, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A} S(n)\cdot d(n) &= \sum_{\substack{n\le x\\ p|n,\ \sqrt{n}<p}} S(n)\cdot d(n) = \sum_{\substack{np\le x\\ n<p}} S(np)\cdot d(np)\\ &= \sum_{\substack{np\le x\\ n<p}} 2p\cdot d(n) = \sum_{n\le\sqrt{x}} 2d(n)\sum_{n<p\le\frac{x}{n}} p. \qquad (1\text{-}2)\end{aligned}$$

设 $\pi(x) = \sum\limits_{p\le x} 1$, 于是利用 Abel 求和公式及素数定理

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i\cdot x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中 c_i $(i = 1,\ 2, \cdots, k)$ 为常数且 $c_1 = 1$.

则有

$$\begin{aligned}\sum_{n<p\le\frac{x}{n}} p &= \frac{x}{n}\cdot\pi\left(\frac{x}{n}\right) - n\cdot\pi(n) - \int_n^{\frac{x}{n}} \pi(y)dy\\ &= \frac{x^2}{2n^2\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i\cdot x^2\cdot \ln^i n}{n^2\cdot\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{n^2\cdot\ln^{k+1} x}\right), \qquad (1\text{-}3)\end{aligned}$$

其中 a_i 为可计算的常数. 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad 及 \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^2 = \frac{\pi^4}{36},$$

结合 (1-2) 及 (1-3) 式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A} S(n)\cdot d(n) &= \frac{x^2}{\ln x}\cdot\sum_{n\le\sqrt{x}}\frac{d(n)}{n^2} + \sum_{n\le\sqrt{x}}\sum_{i=2}^{k}\frac{2a_i\cdot x^2\cdot d(n)\cdot\ln^i n}{n^2\cdot\ln^i x}\\ &\quad +O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right)\\ &= \frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right), \qquad (1\text{-}4)\end{aligned}$$

其中 b_i 为可计算的常数.

现在我们讨论集合 B 中的情况, 由 (1-1) 式及集合 B 的定义知对任意 $n \in B$, 当 n 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 时, 我们有

$$S(n) = \max_{1 \le i \le r} \{S(p_i^{\alpha_i})\} \le \max_{1 \le i \le r} \{\alpha_i p_i\} \le \sqrt{n} \ln n. \tag{1-5}$$

于是由 (1-5) 式有

$$\sum_{n \in B} S(n) \cdot d(n) \le \sum_{n \in B} d(n) \cdot \sqrt{n} \cdot \ln n \le \sum_{n \le x} d(n) \cdot \sqrt{n} \cdot \ln n \le x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x, \tag{1-6}$$

其中利用到渐近公式

$$\sum_{n \le x} d(n) = x \cdot \ln x + O(x).$$

由集合 A 及 B 的定义并结合 (1-4) 及 (1-6) 式有

$$\begin{aligned} \sum_{n \le x} S(n) \cdot d(n) &= \sum_{n \in A} S(n) \cdot d(n) + \sum_{n \in B} S(n) \cdot d(n) \\ &= \frac{\pi^4}{36} \cdot \frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{b_i \cdot x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right), \end{aligned}$$

其中 b_i $(i = 2,\ 3,\ \cdots,\ k)$ 为可计算的常数. 于是完成了定理的证明.

1.3 关于 F.Smarandache 函数 $S(m^n)$ 的渐近性质

从函数 $S_p(n)$ 和 $S(n)$ 的定义可以看出这两个函数存在着密切的关系, 即 $S(p^n) = S_p(n)$. 在本节中我们正是利用这一关系来研究函数 $S(m^n)$ 的渐近性质, 并得到一个渐近公式. 即要证明下面的

定理 1.3.1 设 $m > 1$ 为给定的正整数且标准分解式为 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, 则对任意正整数 n, 有渐近公式

$$S(m^n) = (p-1)\alpha n + O\left(\frac{m}{\ln m} \ln n\right),$$

其中 $(p-1)\alpha = \max_{1 \le i \le k} \{(p_i - 1)\alpha_i\}$.

证明: 设 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 m 的标准分解式, 则 $m^n = p_1^{\alpha_1 n} p_2^{\alpha_2 n} \cdots p_k^{\alpha_k n}$. 那么由性质 1.1 有

$$S(m^n) = S(p_1^{\alpha_1 n} p_2^{\alpha_2 n} \cdots p_k^{\alpha_k n}) = \max_{1 \le i \le k} \{S(p_i^{\alpha_i n})\}. \tag{1-7}$$

另外从函数 $S_p(n)$ 和 $S(n)$ 的定义及性质有

$$S(p^n) = S_p(n),$$

由此可得

$$S(p_i^{\alpha_i n}) = S_{p_i}(\alpha_i n).$$

所以此时可以将 $S(p^n)$ 的渐近性问题转化为 $S_p(n)$ 的渐近性问题来研究. 由上式及渐近式

$$S_p(n) = (p-1)n + O\left(\frac{p}{\ln p}\ln n\right)$$

可得到

$$S(p_i^{\alpha_i n}) = S_{p_i}(\alpha_i n) = (p_i - 1)\alpha_i n + O\left(\frac{p_i}{\ln p_i}\ln(n\alpha_i)\right). \tag{1-8}$$

不失一般性假定

$$S(p^{\alpha n}) = \max_{1\le i\le k}\{S(p_i^{\alpha_i n})\} = \max_{1\le i\le k}\{S_{p_i}(\alpha_i n)\}. \tag{1-9}$$

显然由渐近式 (1-8) 不难看出对充分大的正整数 n, 当 $(p_i-1)\alpha_i$ 最大时, $S(p_i^{\alpha_i n})$ 最大. 因此注意到误差项

$$O\left(\frac{p_i}{\ln p_i}\ln(n\alpha_i)\right) = O\left(\frac{m}{\ln m}\ln n\right),$$

由 (1-7), (1-8) 及 (1-9) 式得到

$$\begin{aligned} S(m^n) &= S(p^{\alpha n}) = S_p(\alpha n) = (p-1)\alpha n + O\left(\frac{p}{\ln p}\ln(\alpha n)\right) \\ &= (p-1)\alpha n + O\left(\frac{m}{\ln m}\ln n\right). \end{aligned}$$

其中 $(p-1)\alpha = \max\limits_{1\le i\le n}\{(p_i-1)\alpha_i\}$. 于是完成了定理的证明.

由此定理可得到下面的

推论 1.3.1 设 $m>1$ 为给定的正整数且标准分解式为 $m = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 那么我们有极限式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(m^n)}{n} = (p-1)\alpha,$$

其中 $(p-1)\alpha = \max\limits_{1\le i\le k}\{(p_i-1)\alpha_i\}$.

1.4 复合函数 $S(Z(n))$ 的均值

本节主要研究复合函数 $S\left(Z(n)\right)$ 的均值问题, 并给出一个较强的渐近公式. 即要证明下面的

定理 1.4.1 设 $k\geq 2$ 为给定的整数, 则对任意实数 $x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}S\left(Z(n)\right)=\frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 c_i $(i=2,\ 3,\cdots,\ k)$ 为可计算的常数.

证明: 事实上, 在和式

$$\sum_{n\leq x}S\left(Z(n)\right) \tag{1-10}$$

中, 注意到当 $\frac{(m-1)m}{2}+1\leq n\leq\frac{m(m+1)}{2}$ 时都有 $Z(n)=m$, 也就是说方程 $Z(n)=m$ 有 m 个解

$$n=\frac{(m-1)m}{2}+1,\ \frac{(m-1)m}{2}+2,\ \cdots,\ \frac{m(m+1)}{2}.$$

由于 $n\leq x$, 所以由 $Z(n)$ 的定义可知当 $Z(n)=m$ 时, m 满足 $1\leq m\leq\frac{\sqrt{8x+1}-1}{2}$. 注意到 $S(n)\leq n$, 于是有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}S\left(Z(n)\right) &= \sum_{\substack{n\leq x\\ Z(n)=m}}S(m)=\sum_{m\leq\frac{\sqrt{8x+1}-1}{2}}m\cdot S(m)+O(x)\\ &= \sum_{m\leq\sqrt{2x}}m\cdot S(m)+O(x).\end{aligned} \tag{1-11}$$

现在我们将所有整数 $1\leq m\leq\sqrt{2x}$ 分为两个集合 A 与 B, 其中集合 A 包含所有那些满足存在素数 p 使得 $p|m$ 且 $p>\sqrt{m}$ 的正整数 m; 而集合 B 包含区间 $[1,\ \sqrt{2x}]$ 中不属于集合 A 的那些正整数. 利用性质 1.1, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A}m\cdot S(m) &= \sum_{\substack{m\leq\sqrt{2x}\\ p|m,\ \sqrt{m}<p}}m\cdot S(m)=\sum_{\substack{mp\leq\sqrt{2x}\\ m<p}}mp\cdot S(mp)\\ &= \sum_{\substack{mp\leq\sqrt{2x}\\ m<p}}mp\cdot p=\sum_{m\leq\sqrt[4]{2x}}m\sum_{m<p\leq\frac{\sqrt{2x}}{m}}p^2.\end{aligned} \tag{1-12}$$

设 $\pi(x)=\sum\limits_{p\leq x}1$, 利用 Abel 求和公式、分部积分法以及素数定理有

$$\sum_{m<p\leq\frac{\sqrt{2x}}{m}}p^2 = \frac{2x}{m^2}\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{2x}}{m}\right)-m^2\cdot\pi(m)-\int_m^{\frac{\sqrt{2x}}{m}}2y\cdot\pi(y)dy$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}\cdot\ln^i m}{m^3\cdot\ln^i\sqrt{2x}} +O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^3\cdot\ln^{k+1}x}\right), \tag{1-13}$$

其中 a_i 为可计算的常数. 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 并结合 (1-12) 及 (1-13) 式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A}S\left(Z(n)\right) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}\sum_{m\leq\sqrt[4]{2x}}\frac{1}{m^2}+\sum_{m\leq\sqrt[4]{2x}}\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}\cdot\ln^i m}{m^2\cdot\ln^i\sqrt{2x}}\\ &\quad +O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)\\ &= \frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),\end{aligned} \tag{1-14}$$

其中 b_i 为可计算的常数.

现在我们讨论集合 B 中的情况, 由

$$S(n)=\max_{1\leq i\leq k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$$

及集合 B 的定义可知, 对任意 $m\in B$, 当 m 的标准分解式为 $m=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 时, 有

$$S(m)=\max_{1\leq i\leq r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}\leq\max_{1\leq i\leq r}\{\alpha_i p_i\}\leq\sqrt{m}\cdot\ln m. \tag{1-15}$$

于是由上式我们有

$$\sum_{m\in B}m\cdot S(m)\leq\sum_{m\in B}m\cdot\sqrt{m}\cdot\ln m\leq\sum_{m\leq\sqrt{2x}}m^{\frac{3}{2}}\cdot\ln m\leq x^{\frac{5}{4}}\ln x. \tag{1-16}$$

由集合 A 及 B 的定义并结合 (1-11), (1-14) 及 (1-16) 式有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}S\left(Z(n)\right) &= \sum_{m\leq\sqrt{2x}}m\cdot S(m)+O(x)\\ &= \sum_{n\in A}m\cdot S(m)+\sum_{n\in B}m\cdot S(m)+O(x)\\ &= \frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),\end{aligned}$$

其中 b_i $(i=2,\ 3,\ \cdots,\ k)$ 为可计算的常数. 于是完成了定理的证明.

特别地, 当 $k=1$ 时有下面更简单的

推论 1.4.1 对任意实数 $x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x} S\left(Z(n)\right)=\frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

1.5 $\sum\limits_{d|n}\dfrac{1}{S(d)}$ 是否为整数的问题

本节的主要目的是研究一个包含 Smarandache 函数 $S(n)$ 的猜想, 并部分的得到解决. 具体地说就是对任意正整数 n, 讨论和式

$$\sum_{d|n}\frac{1}{S(d)} \tag{1-17}$$

是否为整数这一问题, 我们猜测到仅有有限个正整数 n 使得 (1-17) 式为整数. 虽然目前还不能证明这一猜想, 但是我们对它的正确性是深信不疑的. 下面利用初等方法证明了支持这一猜想的几个结论, 也就是对一些特殊的正整数, 我们证明了下面的

定理 1.5.1 当 n 为无平方因子数时, (1-17) 式不可能是正整数.

证明: 首先, 先给出无平方因子数的定义: 一个正整数 n 称作无平方因子数, 如果 $n>1$ 且对任意素数 p, 当 $p\mid n$ 时有 $p^2\dagger n$. 事实上对任意无平方因子数 n, 可设 $n=p_1\cdot p_2\cdots p_k$ 为 n 的标准分解式, 其中 $p_1<p_2<\cdots<p_k$ 为素数. 于是由 $S(n)$ 的定义不难看出 $S(n)=S(p_1\cdot p_2\cdots p_k)=p_k$. 当 $k=1$ 时, $n=p_1$ 为素数, 此时

$$\sum_{d|n}\frac{1}{S(d)}=\sum_{d|p_1}\frac{1}{S(d)}=\frac{1}{S(1)}+\frac{1}{S(p_1)}=1+\frac{1}{p_1}. \tag{1-18}$$

由于 $p_1>1$, 所以 (1-18) 式不可能是整数.

当 $k>1$ 时, 注意到对任意 $d|p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}$ 有 $S(dp_k)=p_k$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\frac{1}{S(d)} &= \sum_{d|p_1\cdot p_2\cdots p_k}\frac{1}{S(d)}=\sum_{d|p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}}\frac{1}{S(d)}+\sum_{d|p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}}\frac{1}{S(dp_k)}\\ &= \sum_{d|p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}}\frac{1}{S(d)}+\sum_{d|p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}}\frac{1}{p_k}\\ &= \sum_{d|p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}}\frac{1}{S(d)}+\frac{2^{k-1}}{p_k}\end{aligned}$$

$$= \cdots\cdots$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{2^{i-1}}{p_i}. \tag{1-19}$$

显然 (1-19) 式不可能是整数. 若不然, 假定 $\sum\limits_{d|n} \frac{1}{S(d)}$ 为整数, 则由 (1-19) 式知 $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{2^{i-1}}{p_i}$ 也为整数. 不妨设

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{2^{i-1}}{p_i} = m.$$

由于 $k > 1$, 所以 p_k 为奇素数, 因此

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{2^{i-1}}{p_i} - m = \frac{2^{k-1}}{p_k},$$

或者

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_k \cdot \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{2^{i-1}}{p_i} - m\right) = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{k-1} \cdot 2^{k-1}. \tag{1-20}$$

显然 (1-20) 式左边能够被 p_k 整除, 而右边不能被 p_k 整除, 矛盾, 所以 (1-19) 式不可能为整数. 于是完成了定理的证明.

为了完成定理 1.5.2 的证明, 先给出下面的

引理 1.5.1 对任意正整数 $n > 1$, 设

$$C_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

则 C_n 不可能为正整数.

证明: 用反证法来证明这一结论. 假定对某一正整数 $n > 1$, C_n 为整数. 则可设 $C_n = m$ 以及 $i = 2^{\alpha_i} \cdot l_i$, $2 \dagger l_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 现在设 $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$. 则 α 在所有 $i = 1, 2, \cdots, n$ 的分解式中只出现一次, 也就是说是唯一的. 若不然, 则存在两个正整数 $1 \le r, s \le n$ 使得 $\alpha_r = \alpha_s = \alpha$. 由于 $r \neq s$, 所以 $l_r \neq l_s$, 从而在奇数 l_r 和 l_s 之间一定存在一个偶数, 设为 $2l$. 于是 $1 < 2^\alpha \cdot 2l = 2^{\alpha+1} \cdot l \le n$, 即存在正整数 $m = 2^{\alpha_r+1} \cdot l$ 也介于 1 和 n 之间且它含 2 的方幂大于 α. 这与 α 的定义矛盾. 从而证明 α 是唯一的. 现在设 $u = 2^\alpha \cdot l_u$, $M = 2^{\alpha-1} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdots l_n$. 则

$$M \cdot C_n = M \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \frac{M}{u}$$

$$
\begin{aligned}
&= M\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\
&\quad +\frac{l_1\cdot l_2\cdots l_n}{2}. \qquad (1\text{-}21)
\end{aligned}
$$

在 (1-21) 式中, 由假设 $M\cdot C_n$ 为整数, 而由 M 的定义可知

$$
M\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)
$$

也为整数, 但是 $\dfrac{l_1\cdot l_2\cdots l_n}{2}$ 不是整数, 矛盾. 从而 C_n 不可能是正整数, 引理证毕.

定理 1.5.2 对任意奇素数 p 及任意正整数 α, 当 $n=p^\alpha$ 且 $\alpha\le p$ 时, (1-17) 式不可能是正整数.

证明: 对于任意奇素数 p 及正整数 α, 当 $n=p^\alpha$ 时, 设 $1\le\alpha\le p$. 则不难计算出

$$
\begin{aligned}
\sum_{d\mid n}\frac{1}{S(d)} &= \sum_{d\mid p^\alpha}\frac{1}{S(d)}=\frac{1}{S(1)}+\frac{1}{S(p)}+\frac{1}{S(p^2)}+\cdots+\frac{1}{S(p^\alpha)}\\
&= 1+\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\alpha}\right). \qquad (1\text{-}22)
\end{aligned}
$$

由引理 1.5.1 及 (1-22) 式可得到当 $n=p^\alpha$ 且 $1\le\alpha\le p$ 时, (1-17) 式不可能是整数. 于是证明了定理 1.5.2.

定理 1.5.3 对于任意正整数 n, 当 n 的标准分解式为 $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}\cdot p_k$ 且 $S(n)=p_k$ 时, (1-17) 式不可能是正整数.

证明: 为方便起见设 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}\cdot p_k=u\cdot p_k$ 并注意到 $S(n)=p_k$, 所以我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{d\mid n}\frac{1}{S(d)} &= \sum_{d\mid u}\frac{1}{S(d)}+\sum_{d\mid u}\frac{1}{S(dp_k)}=\sum_{d\mid u}\frac{1}{S(d)}+\sum_{d\mid u}\frac{1}{p_k}\\
&= \sum_{d\mid u}\frac{1}{S(d)}+\frac{d(u)}{p_k}, \qquad (1\text{-}23)
\end{aligned}
$$

其中 $d(u)$ 为除数函数.

在 (1-23) 式中显然当 $d|u$ 时, $S(d)<p_k$. 所以在有理数 $\displaystyle\sum_{d\mid u}\frac{1}{S(d)}$ 中, 它的分母中不含素数 p_k. 因而当 $\displaystyle\sum_{d\mid n}\frac{1}{S(d)}$ 为整数时, $\dfrac{d(u)}{p_k}$ 必须为整数, 从而

$$
p_k\mid d(u)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_{k-1}+1).
$$

由于 p_k 为素数, 所以 p_k 整除某一 (α_i+1). 从而可得

$$
\alpha_i+1\ge p_k. \qquad (1\text{-}24)
$$

由性质 1.3 及 (1-24) 式知

$$S(p_i^{\alpha_i}) \geq (p_i - 1) \cdot \alpha_i + 1 \geq \alpha_i + 1 \geq p_k \tag{1-25}$$

且 $S(p_i^{\alpha_i}) \neq p_k$, 这是因为 $p_i \mid S(p_i^{\alpha_i})$, 因而 $S(p_i^{\alpha_i}) > p_k$. 这与 $S(n) = p_k$ 矛盾, 所以定理 1.5.3 成立.

由上述三个定理，可以得到下面的

猜想 对任意正整数 n，$\sum_{d|n} \frac{1}{S(d)}$ 为整数当且仅当 $n = 1,\ 8$.

1.6 关于函数 $S(n)$ 的一个方程

对任意的正整数 n, 如果 n 满足

$$\sum_{d|n} S(d) = n + 1 + S(n), \tag{1-26}$$

则称 n 为 Smarandache 完美数. 最近, Ashbacher 在文献 [1] 中研究了这个问题, 并且得到: 当 $n \leq 10^6$ 时, 12 是唯一的 Smarandache 完美数. 在本节中我们将完全解决这个问题. 首先给出

引理 1.6.1 对任意素数 p 和任意正整数 r, 有 $S(p^r) \leq pr$.

引理 1.6.2 令 $d(n)$ 表示除数函数, 则 $d(n)$ 是可乘的. 即如果 $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ 是 n 的标准分解式, 则

$$d(n) = (r_1 + 1)(r_2 + 1) \cdots (r_k + 1).$$

引理 1.6.3 当且仅当 $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$ 时, 不等式

$$\frac{n}{d(n)} < 2, \quad n \in N \tag{1-27}$$

成立.

证明: 对任意正整数 n, 设 $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ 是 n 的标准分解式. 令

$$f(n) = \frac{n}{d(n)}.$$

因为 $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3/2$, $f(4) = 4/3$, $f(6) = 3/2$, (1-27) 式当且仅当 $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$ 时成立.

假如 n 是 (1-27) 的解, 且 $n \neq 1,\ 2,\ 3,\ 4$ 或 6. 由于 $f(5) = \frac{5}{2} > 2$, 我们有 $n > 6$. 在 n 的标准分解式中, 如果 $k = 1$, $r_1 = 1$, 则有 $n = p_1 \geq 7$,

$2 > f(n) = \dfrac{p_1}{2} \ge \dfrac{7}{2}$, 矛盾. 如果 $k=1$, $r_1=2$, 则 $n=p_1^2$, $p_1 \ge 3$. 因此我们有 $2 > f(n) = \dfrac{p_1^{r_1}}{(r_1+1)} \ge \dfrac{2^3}{4} \ge 2$, 矛盾. 如果 $k=2$, 由于 $n>6$, 则有

$$2 > f(n) = \frac{p_1^{r_1}}{r_1+1} \cdot \frac{p_2^{r_2}}{r_2+1} \ge \begin{cases} \dfrac{5}{2} & \text{如果 } p_1 = 2,\ r_1 = 1, \\ 2 & \text{如果 } p_1 = 2,\ r_1 > 1, \\ \dfrac{15}{4} & \text{如果 } p_1 > 2. \end{cases}$$

矛盾. 如果 $k \ge 3$, 则

$$2 > f(n) = \frac{p_1^{r_1}}{(r_1+1)} \frac{p_2^{r_2}}{(r_2+1)} \frac{p_3^{r_3}}{(r_3+1)} \ge \frac{15}{4},$$

矛盾. 综上所述, $n \ne 1,\ 2,\ 3,\ 4$ 或 6 不是 (1-27) 的解. 于是完成了引理的证明.

定理 1.6.1 12 是唯一的Smarandache 完美数.

证明: 设 n 是不等于 12 的 Smarandache 完美数. 由文献 [1] 可知 $n > 10^6$. 由引理 1.6.1, 如果 $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ 是 n 的标准分解式, 则

$$S(n) = S(p^r), \tag{1-28}$$

其中

$$p = p_j, \quad r = r_j, \quad 1 \le j \le k. \tag{1-29}$$

由 (1-29), 有

$$n = p^r m, \quad m \in N, \quad \gcd(p^r, m) = 1. \tag{1-30}$$

对任意正整数 n, 令

$$g(n) = \sum_{d|n} S(d). \tag{1-31}$$

则由 (1-26), Smarandache 完美数 n 满足

$$g(n) = n + 1 + S(n). \tag{1-32}$$

由 (1-28) 有 $n | S(p^r)!$. 因此, 对 n 的任意正因子 d, 有

$$S(d) \le S(p^r). \tag{1-33}$$

因此, 如果 (1-32) 成立, 则由 (1-31) 和 (1-33) 可得

$$d(n) S(p^r) > n. \tag{1-34}$$

其中 $d(n)$ 是除数函数. 另外, 由引理 1.6.3 及 (1-28), (1-30) 和 (1-34) 有

$$\frac{(r+1)S(p^r)}{p^r} > f(m). \tag{1-35}$$

当 $r = 1$ 时, 则有 $S(p) = p$, 由 (1-35) 可得 $2 > f(m)$. 因此, 由引理 1.6.4 有, $m = 1, 2, 3, 4$ 或 6. 当 $m = 1$ 时, 由 (1-32) 可得

$$g(n) = g(p) = S(1) + S(p) = 1 + p = p + 1 + S(p) = 1 + 2p,$$

矛盾. 当 $m = 2$ 时, 则有 $p > 2$ 及

$$g(n) = g(p) = S(1) + S(2) + S(p) + S(2p) = 3 + 2p = 3p + 1, \tag{1-36}$$

所以 $p = 2$, 矛盾. 另外可以利用同样的方法证明, 当 $r = 1$, $m = 3, 4$ 或 6 时, (1-32) 不成立.

当 $r = 2$ 时, 则有 $S(p^2) = 2p$, 由 (1-35) 有

$$\frac{6}{p} > f(m). \tag{1-37}$$

由于 $n > 10^6$, 由 $(1-28)$ 有 $S(p^2) = S(n) \geq 10$, 即 $p \geq 5$. 因此, 由 (1-37) 有 $f(m) < \frac{6}{5}$. 另一方面, 由引理 1.6.4 有 $m \leq 6$. 由于 $n = p^2m \leq 6p^2$, 所以 $p \geq 7$. 因而由 (1-37) 得出矛盾. 用同样的方法可得当 $r = 3, 4, 5$ 或 6 时, (1-35) 不成立.

当 $r \geq 7$ 时, 由 (1-35) 则有 $S(p^r) \leq pr$ 及

$$\frac{(r+1)r}{p^{r-1}} > \frac{(r+1)S(p^r)}{p^r} > f(m) \geq 1, \tag{1-38}$$

由 (1-38) 有

$$(r+1)r > p^{r-1} \geq 2^{r-1} \geq 2\left(\binom{r-1}{0} + \binom{r-1}{1} + \binom{r-1}{2} + \binom{r-1}{3} \right),$$

因此

$$0 > r^2 - 6r + 5 = (r-1)(r-5) > 0,$$

矛盾. 所以没有大于 10^6 的 Smarandache 完美数. 于是完成了定理的证明.

1.7 关于函数 $S(n^k)$ 的一个方程

本节主要是利用初等方法研究方程 $n = S(n^k)$ 的解数问题, 并给出关于这个方程的解数的渐近公式. 即要证明下面的

定理 1.7.1 设 n 为任意正整数, k 为任意给定的正整数, 则对任意实数 $x \geq 1$, 方程 $n = S(n^k)$ 的解数满足渐近公式

$$U(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} 1 = \pi\left(\frac{x}{k}\right) + O(1) = \frac{x}{k \ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

其中 A 表示所有满足 $n = S(n^k)$ 的正整数之集合.

证明: 首先设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解式, 那么有

$$S(n) = \max_{1 \leq i \leq k} \{S({p_i}^{\alpha_i})\} = S(p^{\alpha}).$$

对于方程 $n = S(n^k)$ 的解, 分三种情况讨论

(I) 如果 $k = 1$, 方程成为 $n = S(n)$, 容易得到 $n = 1$ 和 $n = p$ 是方程的解.

(II) 如果 $k = 2$, 方程成为 $n = S(n^2)$, 即 $S(n^2) = S(p^{2\alpha}) = n$. 容易发现 $n = 1$ 是方程的解, 如果 $n > 1$, 分三种情况讨论

(a) 如果 $\alpha = 1$, $S(n^2) = S(p^2) = n = n_1 p$, 且 $(n_1, p) = 1$, 当 $p > 2$ 时, $S(p^2) = 2p = n_1 p$, 可得 $n_1 = 2$, 因此当 $p > 2$ 时, $n = 2p$ 是方程的解.

(b) 如果 $\alpha = 2$, $S(n^2) = S(p^4) = n = n_1 p^2$, 且 $(n_1, p) = 1$, 当 $p > 4$ 时,

$$S(p^4) = 4p = n_1 p^2,$$

可得 $n_1 p = 4$, 这与 $p > 4$ 矛盾, 此时方程无解. 当 $p = 2$ 时,

$$S(p^4) = S(2^4) = 6 \neq 2^2,$$

所以 $n = 4$ 不是方程的解. 当 $p = 3$ 时,

$$S(p^4) = S(3^4) = 9 = 3^2,$$

所以 $p = 3$ 即 $n = 9$ 是方程的解.

(c) 如果 $\alpha \geq 3$, 且 $p > 2$ 时,

$$S(n^2) = S(p^{2\alpha}) \leq 2\alpha p < p^{\alpha} \leq n,$$

用数学归纳法容易证明 $p^{\alpha} > 2\alpha p$, 此时 $S(n^2) \neq n$, 方程无解.

综上所述, 当 $k = 2$ 时, 方程 $n = S(n^2)$ 的解是 $n = 1$, $n = 9$, 和 $n = 2p$.

(III) 如果 $k \geq 3$, 我们来讨论方程 $n = S(n^k)$ 的解. $n = 1$ 显然是方程的解, 如果 $n > 1$, 设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$ 是 n 的标准分解式,

$$S(n) = \max_{1 \leq i \leq k} \{S({p_i}^{\alpha_i})\} = S(p_l^{\alpha_l}).$$

这里 $1 \leq l \leq k$ 且 $p_l \gg k$，则方程就成为

$$S(n^k) = S(p_l^{k\alpha_l}) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t},$$

因为 $S(p_l^{k\alpha_l}) \le k\alpha_l p_l$, 所以有

$$S(p_l^{k\alpha_l}) = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t} \le k\alpha_l p_l.$$

另外用数学归纳法容易证明 $p_l^{\alpha_l} > \alpha_l p_l$, 所以

$$kp_l^{\alpha_l} > k\alpha_l p_l, p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t} > kp_t^{\alpha_t} > k\alpha_l p_l,$$

因此 $S(p_l^{k\alpha_l}) = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t} = k\alpha_l p_l$.

要保证等式 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t} = k\alpha_l p_l$ 成立, 则有 $\alpha_l = 1$, 容易得到 $n = kp_l$ 就是方程的解. 记 $p_l = p$, 当 p 足够大时, 方程 $n = S(n^k)$ 的解是 $n = 1$ 和 $n = kp$, 最多有有限个解遗漏. 经过以上讨论, 我们可以推导出方程 $n = S(n^k)$ 的解的个数的渐近公式为

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} 1 = \sum_{\substack{kp\le x\\ kp\in A}} 1 + O(k) \\ &= \sum_{\substack{p\le \frac{x}{k}\\ kp\in A}} 1 + O(k) \\ &= \pi\left(\frac{x}{k}\right) + O(k) \\ &= \frac{x}{k\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right). \end{aligned}$$

这就完成了定理的证明.

1.8 关于 Smarandache 函数值的分布

对任意正整数 n, 令 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子, 则对任意实数 $x > 1$, 已研究过该函数的值分布的一个规律是

$$\sum_{n\le x}(S(n)-P(n))^2 = \frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann zeta- 函数. 在本节中, 我们将研究 Smarandache 函数 $S(n)$ 的一个新的分布性质, 并得到两个渐近公式. 首先给出

引理 1.8.1 *对任意固定的正整数 k, 如果 $\sqrt{n} > k \ge 2$, 那么*

(i) 若 $P(n) > \sqrt{n}$, 则有 $S(n^k) = SM(n^k) = kP(n)$;

(ii) 若 $n = mp_1P(n)$, $n^{\frac{1}{3}} < p_1 < P(n) \le \sqrt{n}$, 则有

$$S(n^k) = SM(n^k) = kP(n);$$

(*iii*) 若 $n = mP^2(n)$ 和 $n^{\frac{1}{3}} < P(n) \le \sqrt{n}$, 则有

$$S(n^k) = SM(n^k) = 2kP(n).$$

证明: 事实上, 只需要证明对于 $S(n^k)$ 这些结论成立即可. 同理可以证明 $SM(n^k)$.

现在证明 (*i*). 令 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}} P(n)$ 是 n 的标准分解式. 由于 $P(n) > \sqrt{n}$ 时, 有

$$p_1^{k\alpha_1} p_2^{k\alpha_2} \cdots p_{r-1}^{k\alpha_{r-1}} < \sqrt{n^k} < P^k(n), \quad p_i^{k\alpha_i} | (kP(n))!, \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r-1.$$

由此 $n^k \mid (kP(n))!$. 另一方面 $P^k(n) \dagger (kP(n)-1)!$. 从而

$$S(n^k) = S(P^k(n)) = kP(n).$$

引理 1.8.1 (*i*) 成立.

同理, 由于 $n^{\frac{1}{3}} < p_1 < P(n) \le \sqrt{n}$ 可得

$$S(n^k) = kP(n).$$

引理 1.8.1 (*ii*) 成立.

若 $n = mP^2(n)$, 且 $n^{\frac{1}{3}} < P(n) \le \sqrt{n}$, 则有 $m < P(n)$. 由于 $P^{2k}(n) | (2kP(n))!$, 因此

$$m^k | (2kP(n))!.$$

但是 $P^{2k}(n) \dagger (2kP(n)-1)!$, 所以有

$$S(n^k) = 2kP(n).$$

这就完成了引理的证明.

引理 1.8.2 对任意固定的正整数 $k \ge 2$ 及任意实数 $x \ge 3$, 有估计式

$$\sum_{\substack{n \le x \\ P(n) \le n^{\frac{1}{3}}}} \left(S(n^k) - kP(n)\right)^2 \ll k^2 x^{\frac{4}{3}} \ln^2 x$$

和

$$\sum_{\substack{n \le x \\ P(n) \le n^{\frac{1}{3}}}} \left(SM(n^k) - kP(n)\right)^2 \ll k^2 x^{\frac{4}{3}} \ln^2 x.$$

证明: 事实上, 如果 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式, 则有

$$S(n^k) = \max_{1 \le i \le r} \{S(p_i^{k\alpha_i})\}.$$

令 $k\alpha p=\max\limits_{1\le i\le r}\{k\alpha_i p_i\}$, 那么 $S(n^k)\ll kp\ln n$. 注意到当 $\alpha=1$ 时, $kp=kP(n)$, 因此 $S(n^k)-kP(n)=0$, 则有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le n^{\frac{1}{3}}}}(S(n^k)-kP(n))^2\ll\sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le n^{\frac{1}{3}},\ P^2(n)|n}}k^2P^2(n)\ln^2 x$$
$$\ll\sum_{\substack{np^2\le x\\ p\le x^{\frac{1}{3}}}}k^2p^2\ln^2 x\ll\sum_{p\le x^{\frac{1}{3}}}p^2\sum_{n\le\frac{x}{p^2}}k^2\ln^2 x=O_k\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x\right).$$

于是完成引理 1.8.2 的证明.

引理 1.8.3 对任意素数 p 及任意正整数 m, 且 $m\le x^{\frac{1}{3}}$, 则有

$$\sum_{m\le p\le\sqrt{\frac{x}{m}}}p^2=\frac{2x^{\frac{2}{3}}}{3m^{\frac{3}{2}}(\ln x-\ln m)}+O\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{m^{\frac{3}{2}}(\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}})}\right).$$

.

证明: 参阅文献 [2] 引理 3.

定理 1.8.1 对任意固定的正整数 $k\ge 2$ 及任意实数 $x\ge 3$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\big(S(n^k)-kP(n)\big)^2=\frac{2k^2\zeta(\frac{3}{2})}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O_k\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann zeta- 函数, O_k 表示 O 依赖于 k.

证明: 由引理 1.8.1 ， 当 $P(n)>\sqrt{n}$ 时, 有 $S(n^k)=SM(n^k)=kP(n)$. 由引理 1.8.1 和引理 1.8.2 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x}\big(S(n^k)-kP(n)\big)^2\\
=&\sum_{\substack{n\le x\\ P(n)>\sqrt{n}}}\big(S(n^k)-kP(n)\big)^2+\sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le\sqrt{n}}}\big(S(n^k)-kP(n)\big)^2\\
=&\sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le\sqrt{n}}}\big(S(n^k)-kP(n)\big)^2\\
=&\sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le n^{\frac{1}{3}}}}\big(S(n^k)-kP(n)\big)^2+\sum_{\substack{n\le x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\le\sqrt{n}}}\big(S(n^k)-kP(n)\big)^2\\
=&\sum_{\substack{n\le x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\le\sqrt{n}}}\big(S(n^k)-kP(n)\big)^2+O_k\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x\right).
\end{aligned}\tag{1-39}$$

注意到若 $n^{\frac{1}{3}}<P(n)\le\sqrt{n}$, 则有

(a) $n=m\cdot P^2(n)$, 其中 $m<P(n)$.

(b) $n=m\cdot p_1\cdot P(n)$, 其中 $m<n^{\frac{1}{3}}<p_1<P(n)$.

(c) $n=m\cdot P(n)$ 和 $P(m)\le n^{\frac{1}{3}}$.

当 $S(n^k)=kP(n)$ 时, 由 (b) 和 (c), 则 (1-39) 中的和式等于 0. 若 $S(n^k)\neq kP(n)$, 则至少存在一个素数 p 使得 $p^\alpha|m$, $\alpha\ge 2$ 且 $\alpha p>P(n)$. 所以, 我们有 $p<n^{\frac{1}{3}}$. 因此由引理 1.8.2 的估计式和引理 1.8.1(iii) 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n\le x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\le\sqrt{n}}}\big(S(n^k)-kP(n)\big)^2\\
=&\sum_{\substack{mp^2\le x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\le\sqrt{mp^2}}}\big(S(m^kp^{2k})-kP(m^kp^{2k})\big)^2\\
&+\sum_{\substack{mp_1p_2\le x\\ (mp_1p_2))^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2\le\sqrt{mp_1p_2}}}(S(mp_1p_2)-kP(mp_1p_2))^2+O_k\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x\right)\\
=&\sum_{\substack{mp^2\le x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\le\sqrt{mp^2}}}(k^2p^2)+O_k\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x\right)\\
=&\sum_{m<x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m^2<p^2\le\frac{x}{m}}k^2p^2+O_k\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x\right).
\end{aligned}\tag{1-40}$$

现在由引理 1.8.3 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m^2<k^2p^2\le\frac{x}{m}}k^2p^2=\sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{2k^2x^{\frac{2}{3}}}{3m^{\frac{3}{2}}(\ln x-\ln m)}+O_k\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)\right)\\
=&\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}\sum_{m\le e^{\sqrt{lnx}}}\frac{k^2}{m^{\frac{3}{2}}}+O_k\left(\sum_{e^{\sqrt{\ln x}}\le m\le x^{\frac{1}{3}}}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)+O_k\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)\\
=&\frac{2k^2\zeta(\frac{3}{2})}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O_k\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).
\end{aligned}\tag{1-41}$$

结合 (1-39), (1-40) 和 (1-41) 立即得到下面的渐近公式

$$\sum_{n\le x}\big(S(n^k)-kP(n)\big)^2=\frac{2k^2\zeta(\frac{3}{2})}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O_k\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

这就完成了定理的证明.

用同样的方法, 也可以得到

定理 1.8.2 对任意实数 $x \geq 3$, 有

$$\sum_{n\leq x}\left(SM(n^k)-kP(n)\right)^2=\frac{2k^2\zeta(\frac{3}{2})}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O_k\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

1.9 $S(a_k(n))$ 函数的值分布

函数 $a_k(n)$ 表示 n 的 k 次补数, 它也是 F.Smarandache 教授引入的, 有关这一函数的研究工作也不少, 可参阅文献 [3], [4] 及 [5]. 本节主要研究了复合函数 $S(a_k(n))$ 的值分布问题. 首先给出

引理 1.9.1 设 $k \geq 2$ 是一个给定的整数. 那么对充分大的任意正整数 n,
(*i*) 如果 $P(n) > \sqrt{n}$, 那么 $S\left(a_k(n)\right) = SM\left(a_k(n)\right) = (k-1)P(n)$;
(*ii*) 如果 $n = mp_1P(n)$ 且 $n^{\frac{1}{3}} < p_1 < P(n) \leq \sqrt{n}$, 那么

$$S\left(a_k(n)\right) = SM\left(a_k(n)\right) = (k-1)P(n);$$

(*iii*) 如果 $n = mP^2(n)$ 且 $n^{\frac{1}{3}} < P(n) \leq \sqrt{n}$, 那么当 $k > 2$ 时有

$$S\left(a_k(n)\right) = SM\left(a_k(n)\right) = (k-2)P(n);$$

当 $k = 2$ 时,

$$S\left(a_k(n)\right) = SM\left(a_k(n)\right) \leq kn^{\frac{1}{3}}.$$

证明: 只证明对 $S(a_k(n))$ 的结论成立即可. 类似地, 可以推出所有结果适用于 $SM(a_k(n))$.

首先证明 (*i*). 设 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式, 由于 $P(n) > \sqrt{n}$, 所以 $P(n) = p_r$, $\alpha_r = 1$. 因此

$$S(a_k(P(n))) = S\left(P^{k-1}(n)\right) = (k-1)P(n).$$

而

$$S\left(a_k(p_i^{\alpha_i})\right) \leq S\left(p_i^{k-1}\right) \leq (k-1)p_i \leq (k-1)P(n), i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r.$$

所以 $S\left(a_k(n)\right) = (k-1)P(n)$.

再来证明 (*ii*) 式. 事实上由于 m 的任意素因子 p 都满足 $p < n^{\frac{1}{3}}$. 而当 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准分解式时, 显然 $a_k(n) = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$ 满足 $\beta_i \leq k-1$, $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r$. 于是由

$$n^{\frac{1}{3}} < p_1 < P(n) \leq \sqrt{n}$$

可推出

$$S\left(a_k(n)\right) = (k-1)P(n).$$

最后证明 (iii) 式. 当 $n = mP^2(n)$ 且 $n^{\frac{1}{3}} < P(n) \leq \sqrt{n}$ 时, 由于这时 $m < P(n)$, 所以当 $k > 2$ 时,

$$S\left(a_k(P^2(n))\right) = S\left(P^{k-2}(n)\right) = (k-2)P(n),$$

从而

$$S\left(a_k(n)\right) = (k-2)P(n).$$

当 $k = 2$ 时, 显然 $a_k(P^2(n)) = 1$, m 的其它素因子不大于 $n^{\frac{1}{3}}$. 因此

$$S\left(a_k(n)\right) \leq S\left(P^{k-1}(m)\right) \leq kn^{\frac{1}{3}}.$$

于是完成了引理的证明.

引理 1.9.2 设 $k \geq 2$ 为给定的整数, 那么对任意实数 $x \geq 3$, 有估计式

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq n^{\frac{1}{3}}}} \left(S\left(a_k(n)\right) - (k-1)P(n)\right)^2 \ll k^2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}$$

及

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq n^{\frac{1}{3}}}} \left(SM\left(a_k(n)\right) - (k-1)P(n)\right)^2 \ll k^2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}.$$

证明: 设 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准分解式, $a_k(n) = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$ 为 $a_k(n)$ 的标准分解式. 则

$$S\left(a_k(n)\right) = \max_{1\leq i\leq r}\{S(p_i^{\beta_i})\}.$$

令 $\beta p = \max\limits_{1\leq i\leq r}\{\beta_i p_i\}$, 于是有

$$S\left(a_k(n)\right) \leq \beta p \leq kp.$$

注意到当 $P(n)$ 在 n 的标准分解式中的方幂为 1 时, $\beta = k-1$，此时有

$$S\left(a_k(n)\right) - (k-1)P(n) = 0,$$

所以

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq n^{\frac{1}{3}}}} \left(S(a_k(n)) - (k-1)P(n)\right)^2 \ll \sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq n^{\frac{1}{3}},\ P^2(n)|n}} k^2P^2(n)$$

$$\ll \sum_{\substack{np^2\leq x\\ p\leq x^{\frac{1}{3}}}} k^2p^2 \ll \sum_{p\leq x^{\frac{1}{3}}} p^2 \sum_{n\leq \frac{x}{p^2}} k^2 \ll k^2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}.$$

同理可推出另一个估计式. 于是完成了引理 1.9.2 的证明.

引理 1.9.3 设 p 为素数, m 为正整数, 则有估计式

$$\sum_{m\leq p\leq\sqrt{\frac{x}{m}}} p^2 = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3m^{\frac{3}{2}}(\ln x-\ln m)} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}(\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}})}\right).$$

证明: 参阅文献 [2] 中引理 3.

定理 1.9.1 设 $k\geq 2$ 是一个给定的整数, 那么对任意实数 $x\geq 3$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\left(S\left(a_k(n)\right)-(k-1)P(n)\right)^2 = \frac{2\zeta(\frac{3}{2})}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right) + O\left(\frac{k^2x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数.

证明: 由引理 1.9.1 知当 $P(n)>\sqrt{n}$ 时,

$$S(a_k(n)) = SM(a_k(n)) = (k-1)P(n).$$

因此结合引理 1.9.1 及引理 1.9.2 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leq x}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)>\sqrt{n}}}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2 + \sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq\sqrt{n}}}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq\sqrt{n}}}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq n^{\frac{1}{3}}}}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2 + \sum_{\substack{n\leq x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leq\sqrt{n}}}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{n\leq x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leq\sqrt{n}}}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2 + O\left(\frac{k^2x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}\right). \qquad (1\text{-}42)
\end{aligned}$$

注意当 n 满足 $n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leq\sqrt{n}$ 时, 可分为以下三种情况

(a) $n=m\cdot P^2(n)$ 且 $m<P(n)$.

(b) $n=m\cdot p_1\cdot P(n)$ 且 $m<n^{\frac{1}{3}}<p_1<P(n)$.

(c) $n=m\cdot P(n)$ 且 $P(m)\le n^{\frac{1}{3}}$.

对于情形 (b) 和 (c) 中的 n, 显然这些 n 满足

$$S(a_k(n))=(k-1)P(n),$$

于是这种 n 在 (1-42) 式中产生的和式为 0. 而对于情形 (a) 中的 n, 当 $k>2$ 时有

$$S(a_k(n))=(k-2)P(n).$$

则由 (1-42) 式有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n\le x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\le\sqrt{n}}}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{mp^2\le x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\le\sqrt{mp^2}}}\left(S(p^{k-2})-(k-1)p\right)^2\\
=&\sum_{\substack{mp^2\le x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\le\sqrt{mp^2}}}p^2\\
=&\sum_{m<x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m^2<p^2\le\frac{x}{m}}p^2. \qquad (1\text{-}43)
\end{aligned}$$

而对于情形 (a) 中的 n, 当 $k=2$ 时有

$$S(a_k(n))\le k^2P(m)\le k^2\cdot n^{\frac{1}{3}},$$

此时仍然有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n\le x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\le\sqrt{n}}}\left(S(a_2(n))-P(n)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{mp^2\le x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\le\sqrt{mp^2}}}\left(S^2(a_2(n))-2pS(a_2(n))+p^2\right)\\
=&\sum_{\substack{mp^2\le x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\le\sqrt{mp^2}}}p^2+O\left(\sum_{\substack{mp^2\le x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\le\sqrt{mp^2}}}\left((mp^2)^{\frac{2}{3}}+(mp^2)^{\frac{1}{3}}p\right)\right)\\
=&\sum_{m<x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m^2<p^2\le\frac{x}{m}}p^2+O\left(x^{\frac{4}{3}}\right). \qquad (1\text{-}44)
\end{aligned}$$

结合 (1-43), (1-44) 式及引理 1.9.3, 并注意到 $x^{\frac{4}{3}} \ll \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}$, 可知当 $k \geq 2$ 时有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n \leq x \\ n^{\frac{1}{3}} < P(n) \leq \sqrt{n}}} (S(a_k(n)) - (k-1)P(n))^2 \\
= &\sum_{m \leq x^{\frac{1}{3}}} \sum_{m^2 < p^2 \leq \frac{x}{m}} p^2 + O\left(x^{\frac{4}{3}}\right) \\
= &\sum_{m \leq x^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3m^{\frac{3}{2}}(\ln x - \ln m)} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}(\ln^2 \sqrt{\frac{x}{m}})} \right) \right) \\
= &\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x} \sum_{m \leq e^{\sqrt{\ln x}}} \frac{1}{m^{\frac{3}{2}}} + O\left(\sum_{e^{\sqrt{\ln x}} \leq m \leq x^{\frac{1}{3}}} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}} \ln x} \right) + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x} \right) \\
= &\frac{2}{3} \cdot \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x} \right). \qquad (1\text{-}45)
\end{aligned}$$

由 (1-42) 及 (1-45) 式可得到渐近公式

$$\sum_{n \leq x} (S(a_k(n)) - (k-1)P(n))^2 = \frac{2}{3} \cdot \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x} \right) + O\left(\frac{k^2 x^{\frac{4}{3}}}{\ln x} \right).$$

于是完成了定理的证明.

类似地不难推出

定理 1.9.2 对任意实数 $x \geq 3$, 有

$$\sum_{n \leq x} (SM(a_k(n)) - (k-1)P(n))^2 = \frac{2\zeta(\frac{3}{2})}{3} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x} \right) + O\left(\frac{k^2 x^{\frac{4}{3}}}{\ln x} \right).$$

1.10 两个包含 Smarandache 函数的方程

在本节中将利用初等方法研究方程

$$S(1^2) + S(2^2) + \cdots + S(n^2) = S\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

的可解性问题, 并给出这个方程的所有正整数解, 即要证明下面的

定理 1.10.1 设 n 为任意给定的正整数, 方程

$$S(1^2) + S(2^2) + \cdots + S(n^2) = S\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

有且仅有 $n=1,\ 2$ 两个正整数解.

证明: 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解式, 则有

$$S(n)=\max_{1\le i\le k}\{S({p_i}^{\alpha_i})\}=S(p^{\alpha}),$$

其中 $S(p_i^{\alpha_i})\le S(p^{\alpha})$, $1\le i\le k$.

对于方程

$$S(1^2)+S(2^2)+\cdots+S(n^2)=S\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right),$$

显然 $n=1$ 是方程的一个解. 若 $n>1$, 我们分两种情况讨论

(I) 若 $n=2$, 则 $S(1^2)+S(2^2)=S(1)+S(4)=5$ 并且

$$S\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=S(5)=5,$$

所以 $n=2$ 是方程的一个解.

(II) 如果 $n\ge 3$, 那么 $S(n^2)\ge 3$. 由 $S(n)$ 的性质可知

$$S(1^2)+S(2^2)+\cdots+S(n^2)\ge 1+4+3(n-2)=3n-1.$$

又因为

$$(n,n+1)=1,\ (n,2n+1)=1,\ (2n+1,n+1)=1.$$

所以有

$$S\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\le\max\{S(n),S(n+1),S(2n+1)\}\le 2n+1.$$

由此可得 $3n-1\le 2n+1$. 即 $n\le 2$. 在这种情况下, 方程无解.

结合这两种情况, 可知方程

$$S(1^2)+S(2^2)+\cdots+S(n^2)=S\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

有且仅有两个正整数解, 它们分别是 $n=1,\ 2$. 这就完成了定理 1.10.1 的证明.

定理 1.10.2 对任意正整数 k, 方程

$$S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)=S(m_1+m_2+\cdots+m_k)$$

至少有一个正整数解.

证明: 对任意给定的正整数 k, 下面分三种情况来讨论方程

$$S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)=S(m_1+m_2+\cdots+m_k).$$

(I) 如果 $k=1$, 显然方程有无穷多个正整数解.

(II) 如果 $k=p$, p 是一个素数, 设 $m_1=m_2=\cdots=m_k=1$, 则有 $S(1)=1$, 且 $S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)=p=S(p)=S(m_1+m_2+\cdots+m_k)$ 满足方程.

(III) 若 $k>1$ 且 k 不是素数, 则由初等数论中的结果可知必存在一素数 p 使得 $k\le p\le 2k$. 设 $p-k=l$, 其中 $1\le l\le k$. 若令

$$m_1=m_2=\cdots=m_l=2,\quad m_{l+1}=m_{l+2}=\cdots=m_k=1$$

且 $S(1)=1$, $S(2)=2$, 则有

$$S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)=2l+(k-l)=l+k=p$$

和

$$\begin{aligned} S(m_1+m_2+\cdots+m_k) &= S(k+l)=S(p)=p \\ &= S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k) \end{aligned}$$

成立. 因此 $m_1=m_2=\cdots=m_l=2,\ m_{l+1}=m_{l+2}=\cdots=m_k=1$, 满足方程.

综合以上两种情况, 可以得到至少有一个解满足方程. 这就完成了定理 1.10.2 的证明.

1.11 $S(n)$ 函数及其均值

定理 1.11.2 任意给定正整数 k, 则对任意实数 $x>2$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}[S(n)-S(S(n))]^2=\frac{2}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 是Riemann zeta- 函数, c_i $(i=1,\ 2,\cdots,\ k)$ 是可计算常数, 并且 $c_1=1$.

证明: 事实上，对任意正整数 $n>1$, 若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 表示 n 的标准分解式, 则有

$$S(n)=\max\{S(p_1^{\alpha_1}),\ S(p_2^{\alpha_2}),\ \cdots,\ S(p_s^{\alpha_s})\}\equiv S(p^{\alpha}).\tag{1-46}$$

现在我们考虑和式

$$\sum_{n\le x}[S(n)-S(S(n))]^2=\sum_{n\in A}[S(n)-S(S(n))]^2+\sum_{n\in B}[S(n)-S(S(n))]^2,\tag{1-47}$$

其中 A 和 B 是区间 $[1,\ x]$ 的所有正整数的子集. $A=\{n|\mathrm{S(n)=\ S(p^2)},n\in[1,\ x],\mathrm{p?}\}$; $B=\{n|\mathrm{S(n)=\ S(p^{\alpha})},\alpha=1$ 或者 $\alpha\ge 3,n\in[1,\ x],\}$. 若 $n\in A$,

则 $n=p^2m$ 且 $P(m)<2p$, 其中 $P(m)$ 表示 m 的最的素因子. 由 $S(n)$ 的定义, 当 $p>2$ 时, 我们有 $S(n)=S(mp^2)=S(p^2)=2p$ 和 $S(S(n))=S(2p)=p$.

由 (1-46) 及集合 A 的定义可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in A}[S(n)-S(S(n))]^2\\
=&\sum_{\substack{n\le x\\ p^2\|n,\ \sqrt{n}<p^2}}\left[S(p^2)-S(S(p^2))\right]^2+\sum_{\substack{n\le x\\ p^2\|n,\ p^2\le\sqrt{n}}}\left[S(p^2)-S(S(p^2))\right]^2\\
=&\sum_{\substack{p^2n\le x\\ n<p^2,\ (p,\ n)=1}}\left[S(p^2)-S(S(p^2))\right]^2+\sum_{\substack{p^2n\le x\\ p^2\le n,\ (p,\ n)=1}}\left[S(p^2)-S(S(p^2))\right]^2\\
=&\sum_{\substack{p^2n\le x\\ n<p^2,\ (p,\ n)=1}}p^2+\sum_{\substack{p^2n\le x\\ n\ge p^2,\ (p,\ n)=1}}p^2+O(1)\\
=&\sum_{n\le\sqrt{x}}\sum_{n<p^2\le\frac{x}{n}}p^2+O\left(\sum_{m\le x^{\frac14}}\sum_{p\le\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac13}}p^2\right)+O\left(\sum_{p\le x^{\frac14}}\sum_{p^2\le n\le\frac{x}{p^2}}p^2\right)\\
=&\sum_{n\le\sqrt{x}}\sum_{p\le\sqrt{\frac{x}{n}}}p^2+O\left(\frac{x^{\frac54}}{\ln x}\right),
\end{aligned}\tag{1-48}$$

其中 $p^2\|n$ 表示 $p^2|n$, 但 $p^3\dagger n$.

根据阿贝尔求和公式有:

$$\pi(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 a_i $(i=1,\ 2,\cdots,k)$ 是可计算常数, $a_1=1$.

我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{p\le\sqrt{\frac{x}{n}}}p^2&=\frac{x}{n}\cdot\pi\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)-\int_{\frac32}^{\sqrt{\frac{x}{n}}}2y\cdot\pi(y)dy\\
&=\frac13\cdot\frac{x^{\frac32}}{n^{\frac32}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^i\sqrt{\frac{x}{n}}}+O\left(\frac{x^{\frac32}}{n^{\frac32}\cdot\ln^{k+1}x}\right),
\end{aligned}\tag{1-49}$$

这里我们用到了估计式 $n\le\sqrt{x}$, 其中 b_i 为可计算常数, $b_1=1$.

注意到 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac32}}=\zeta\left(\frac32\right)$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^i n}{n^{\frac32}}$ 对 $i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k$ 是收敛的. 因此由 (1-48) 和 (1-49) 可得

$$\sum_{n\in A}[S(n)-S(S(n))]^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n\le\sqrt{x}}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^i\sqrt{\frac{x}{n}}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}\cdot\ln^{k+1}x}\right)\right]+O\left(\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\ln x}\right)\\
&= \frac{2}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right), \qquad (1\text{-}50)
\end{aligned}
$$

其中 c_i $(i=1,\ 2,\ 3,\cdots,k)$ 是可计算常数, $c_1=1$.

现在我们来估计集合 B 上的和式. 对任意正整数 $n\in B$, 若 $S(n)=S(p)=p$, 则 $[S(n)-S(S(n))]^2=[S(p)-S(S(p))]^2=0$; 若 $S(n)=S(p^\alpha)$, $\alpha\ge 3$, 则

$$[S(n)-S(S(n))]^2=[S(p^\alpha)-S(S(p^\alpha))]^2\le\alpha^2p^2$$

且 $\alpha\le\ln x$. 因此有

$$\sum_{n\in B}[S(n)-S(S(n))]^2\ll\sum_{\substack{np^\alpha\le x\\ \alpha\ge 3}}\alpha^2\cdot p^2\ll x\cdot\ln^2 x. \qquad (1\text{-}51)$$

结合 (1-47), (1-50) 和 (1-51) 我们立即得到渐近公式

$$\sum_{n\le x}[S(n)-S(S(n))]^2=\frac{2}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 c_i $(i=1,\ 2,\ 3,\cdots,k)$ 是可计算常数, $c_1=1$.

这就完成了定理的证明.

第二章 Smarandache 对偶函数

Smarandache 函数的对偶函数 $S^*(n)$ 是一类非常重要的可乘函数, 它与 Smarandache 函数 $S(n)$ 有很多类似的性质. 前一章已经对 $S(n)$ 函数作了较详细的介绍, 本章主要利用初等方法来讨论 Smarandache 对偶函数的一些均值问题, 包含 Smarandache 对偶函数的级数的敛散性问题及一些特殊方程的求解问题等.

2.1 引言

定义 2.1 对任意正整数 n, 著名的 Smarandache 对偶函数 $S^*(n)$ 定义为最大的正整数 m 使得 $m!|n$, 即 $S^*(n) = \max\{m:\ m!|n,\ m \in N\}$.

定义 2.2 对任意正整数 n, $S^{**}(n)$ 定义为: 当 $2\dagger n$ 时, $S^{**}(n)$ 为最大的正整数 $2m-1$ 使得 $(2m-1)!! \mid n$; 当 $2 \mid n$ 时, $S^{**}(n)$ 为最大的正整数 $2m$ 使得 $(2m)!! \mid n$.

下面给出函数 $S^*(n)$ 的基本性质

性质 2.1 当 n 为奇数时, $S^*(n) = 1$, 当 n 为偶数时, $S^*(n) \geq 2$.

性质 2.2 对任意的正整数 k, 我们有

$$S^*\left((2k-1)!(2k+1)!\right) = q - 1,$$

其中 k 是一个正整数, q 是跟随 $2k+1$ 的第一个素数.

性质 2.3 当 $Re(s) > 1$ 时有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(n)}{n^s} = \zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^s},$$

其中 $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 是 Riemann zeta- 函数.

性质 2.4 关于函数 $S^*(n)$ 的均值有渐近公式

$$\sum_{n \leq x} S^*(n) = (e-1)x + O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right).$$

2.2 Smarandache 对偶函数的渐近公式

在本节中, 将利用初等方法来研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(n)}{n^s} \tag{2-1}$$

的求和问题, 给出 (2-1) 的精确计算公式；同时也研究了 $S^*(n)$ 的均值性质, 并给出关于 $S^*(n)$ 的很强的渐近公式. 即将要证明

定理 2.2.1　对任意实数 $s>1$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(S^*(n))^k}{n^s}=\zeta(s)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k-(n-1)^k}{(n!)^s}$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S^*(n)n^s}=\zeta(s)\cdot\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)((n+1)!)^s}\right),$$

其中 $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 是 Riemann zeta- 函数.

证明：　事实上, 对任意正整数 m, 由 Stirling's 公式 (参阅文献 [6] 中定理 3.3.1), 有

$$\ln(m!)=\sum_{k=1}^{m}\ln k=m\ln m-m+O(1). \tag{2-2}$$

由这个渐近公式和 $S^*(n)$ 的定义可得到: 如果 $m!|n$, 那么有 $m!\le n$, 或者 $\ln(m!)\le\ln n$. 因此

$$S^*(n)=m\le\frac{2\ln n}{\ln\ln n}\frac{S^*(n)}{n^s}\le\frac{2\ln n}{n^s\cdot\ln\ln n}.$$

所以当 $s>1$ 时，Dirichlet 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S^*(n)}{n^s}$ 是绝对收敛的. 如果 $S^*(n)=m$, 那么有 $m!|n$. 令

$$n=m!\cdot n_1,\quad \text{其中}\quad (m+1)\dagger n_1.$$

对任意实数 $s>1$, 由 $S^*(n)$ 的定义有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(S^*(n))^k}{n^s} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\S^*(n)=m}}^{\infty}\frac{m^k}{n^s}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\(m+1)\dagger n}}^{\infty}\frac{m^k}{(m!)^s\cdot n^s}\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^k}{(m!)^s}\sum_{\substack{n=1\\(m+1)\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^k}{(m!)^s}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^s\cdot n^s}\right)\\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^k}{(m!)^s}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^k}{((m+1)!)^s}\right)
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m+1)^k}{((m+1)!)^s}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^k}{((m+1)!)^s}\right)$$
$$= \zeta(s)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k-(n-1)^k}{(n!)^s}.$$

这就完成了定理 2.2.1 的证明.

注意到 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$, 则

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s)=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e-1,\quad \frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},$$

其中 $\mu(n)$ 是 Möbius 函数. 由定理 2.2.1, 可以得到下面的

推论 2.2.1 对任意正整数 n, 有

$$\sum_{d|n}\mu(d)S^*\left(\frac{n}{d}\right)=\begin{cases}1, & 如果 n=m!,\ m 是正整数;\\ 0, & 否则.\end{cases}$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^*(n)}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}.$$

证明: 注意到 $\dfrac{1}{\zeta(s)}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$, 由定理 2.2.1, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^*(n)}{n^s}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(m)\cdot S^*(n)}{(mn)^s}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{u\cdot v=n}\mu(u)S^*(v)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{d|n}\mu(d)S^*\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s}. \qquad (2\text{-}3)$$

比较 (2-3) 中 Dirichlet 级数的系数, 可得到等式

$$\sum_{d|n}\mu(d)S^*\left(\frac{n}{d}\right)=\begin{cases}1, & 如果 n=m!,\ m 是正整数;\\ 0, & 否则.\end{cases}$$

根据定理 2.2.1 的注释, 有以下

推论 2.2.2

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^*(n)}{n^s}\right)=e-1,$$

其中 $e = 2.718281828459\cdots$ 是常数.

由定理 2.2.1 和 Perron's 公式 (参阅文献 [6] 中的定理 6.5.2), 也可以得到 $S^*(n)$ 均值的渐近公式. 但是用初等方法, 则可得到更强的估计, 即

定理 2.2.2　对任意实数 $x > 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x} S^*(n) = (e-1)x + O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right).$$

证明:　对任意实数 $x > 1$, 令 k 是使得 $k! \le x < (k+1)!$ 的正整数. 那么由 (2-2) 式有

$$k = \frac{\ln x}{\ln\ln x} + O\left(\frac{\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right).$$

由这个估计式和 $S^*(n)$ 的定义可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x} S^*(n) &= \sum_{m!\le x}\sum_{\substack{n\le x\\ S^*(n)=m}} m = \sum_{\substack{m!\cdot n\le x\\ m+1\dagger n}} m = \sum_{m!\le x} m \sum_{\substack{n\le \frac{x}{m!}\\ m+1\dagger n}} 1\\
&= \sum_{m!\le x} m\left(\sum_{n\le\frac{x}{m!}} 1 - \sum_{n\le\frac{x}{(m+1)!}} 1\right) = \sum_{m!\le x} m\left(\frac{x\cdot m}{(m+1)!} + O(1)\right)\\
&= x\cdot\sum_{m!\le x}\frac{m^2}{(m+1)!} + O\left(\sum_{m!\le x} m\right)\\
&= x\cdot\sum_{m\le\frac{\ln x}{\ln\ln x}}\frac{m^2}{(m+1)!} + O\left(\frac{\ln x}{(\ln\ln x)^2}\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right) + O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right)\\
&= x\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2}{(m+1)!} + O\left(x\cdot\sum_{m!>x}\frac{m^2}{(m+1)!}\right) + O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right)\\
&= x\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(m-1)!} - \frac{1}{m!} + \frac{1}{(m+1)!}\right) + O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right)\\
&= (e-1)\cdot x + O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right),
\end{aligned}$$

这里利用等式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e$. 于是完成了定理的证明.

2.3　关于 Smarandache 对偶函数的一个方程

本节主要是利用初等方法研究一类包含 Smarandache 对偶函数方程的可解性问题, 具体地说考虑是否存在正整数 n 满足方程

$$\sum_{d|n} S^*(d) = n. \tag{2-4}$$

很显然几乎对所有 n 都有 $\sum_{d|n} S^*(d) \leq n$. 那么到底有多少 n 能满足 (2-4) 式? 本节彻底解决了这一问题, 求出了该方程的所有正整数解. 即要证明下面的

定理 2.3.1 方程 (2-4) 有且仅有 $n = 1, 12$ 两个正整数解.

证明: 容易验证 $n = 1$ 满足方程 (2-4). 现在假定 $n > 1$ 且满足 (2-4) 式, 下面分几种情况来讨论

(i) $n = 2k + 1$ 为奇数, 此时对任意 $d|n$ 显然有 2! 不整除 n, 所以 $S^*(d) = 1$. 当 $n > 1$ 且满足 (2-4) 式时应有

$$n = \sum_{d|n} S^*(d) = \sum_{d|n} 1 = d(n), \tag{2-5}$$

其中 $d(n)$ 表示 Dirichlet 除数函数. 但是当 $n \geq 3$ 时有 $n > d(n)$, (2-5) 式显然是不成立的, 所以方程 (2-4) 没有大于 1 的奇数解.

(ii) $n = 2 \cdot m$, m 为奇数. 容易验证 $m = 1, 3, 5$ 时 n 不满足 (2-4) 式. 于是可假定 $m \geq 7$. 若 $3 \dagger m$ 且满足 (2-4) 式时应有

$$\begin{aligned} n &= 2m = \sum_{d|n} S^*(d) = \sum_{d|m} S^*(d) + \sum_{d|m} S^*(2d) \\ &= \sum_{d|m} 1 + \sum_{d|m} 2 = 3d(m). \end{aligned}$$

即 $2m = 3d(m)$, 但当 $m \geq 7$ 时容易验证 $2m > 3d(m)$, 此时等式不成立.

若 $3|m$ 且 $n = 2m$ 满足 (2-4) 式, 则

$$\begin{aligned} n &= 2m = 6 \cdot \frac{m}{3} = \sum_{d|n} S^*(d) = \sum_{d|m} S^*(d) + \sum_{d|m} S^*(2d) \\ &= \sum_{d|m} 1 + \sum_{d|\frac{m}{3}} S^*(6d) + \sum_{d|\frac{m}{3}} S^*(2d) \\ &\leq d(m) + \sum_{d|\frac{m}{3}} 3 + 3d(\frac{m}{3}) = d(m) + 6d(\frac{m}{3}). \end{aligned}$$

即

$$2m = \frac{m}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{m}{3} \leq d(m) + 6d(\frac{m}{3}).$$

此式当奇数 $\frac{m}{3}$ 大于 3 时显然不成立. 而当 $\frac{m}{3}=3$ 即 $n=18$ 时, 可直接验证

$$\begin{aligned}\sum_{d|18} S^*(d) &= S^*(1)+S^*(2)+S^*(3)+S^*(6)+S^*(9)+S^*(18)\\ &= 1+2+1+3+1+2=10,\end{aligned}$$

此时 (2-4) 式不成立. 所以，$n=2\cdot m$ (m 为奇数), 不是方程 (2-4) 的解.

(iii) $n=2^2\cdot m$, m 为奇数. 容易验证 $m=1$ 时 $n=4$ 不满足 (2-4) 式. 而当 $m=3$ 即 $n=12$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{d|12} S^*(d) &= S^*(1)+S^*(2)+S^*(3)+S^*(4)+S^*(6)+S^*(12)\\ &= 1+2+1+2+3+3=12,\end{aligned}$$

因此 $n=12$ 满足方程 (2-4). 若 $m>3$, 则当 $3|m$ 时有 $m\geq 9$, 此时若 n 满足 (2-4), 则

$$\begin{aligned}n &= 2^2m=\sum_{d|n} S^*(d)=\sum_{d|m} S^*(d)+\sum_{d|m} S^*(2d)+\sum_{d|m} S^*(4d)\\ &= \sum_{d|m} 1+\sum_{d|\frac{m}{3}} S^*(6d)+\sum_{d|\frac{m}{3}} S^*(2d)+\sum_{d|\frac{m}{3}} S^*(12d)+\sum_{d|\frac{m}{3}} S^*(6d)\\ &\leq d(m)+4\sum_{d|\frac{m}{3}} 3=d(m)+12d(\frac{m}{3}),\end{aligned}$$

即

$$4m=m+9\cdot\frac{m}{3}\leq d(m)+12d(\frac{m}{3}),$$

根据除数函数的性质容易验证此式当奇数 $\frac{m}{3}>3$ 时不可能成立. 而当 $\frac{m}{3}=3$ 即 $n=36$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{d|36} S^*(d) &= S^*(1)+S^*(2)+S^*(3)+S^*(4)+S^*(6)+S^*(12)+S^*(9)\\ &\quad +S^*(18)+S^*(36)\\ &= 1+2+1+2+3+3+1+3+3=19\neq 36.\end{aligned}$$

当 $n=2^2\cdot m$, m 为奇数且 $3\nmid m$ 时, 若 n 满足 (2-4) 式, 则应有

$$\begin{aligned}n &= 4m=\sum_{d|n} S^*(d)=\sum_{d|m} S^*(d)+\sum_{d|m} S^*(2d)+\sum_{d|m} S^*(4d)\\ &= \sum_{d|m} 1+\sum_{d|m} 2+\sum_{d|m} 2=5d(m),\end{aligned}$$

但 $4m=5d(m)$ 是不成立的. 所以，当 $n=2^2\cdot m$, m 为奇数时只有 $n=12$ 满足 (2-4) 式.

(iv) $n=2^\alpha\cdot m$, m 为奇数, $\alpha\geq 3$. 此时若 $m=1$, 则 $n=2^\alpha$, 这时

$$\begin{aligned} n &= 2^\alpha=\sum_{d|2^\alpha}S^*(d)=1+\sum_{d|2^{\alpha-1}}S^*(2d)\\ &= 1+2d(2^{\alpha-1})=2\alpha+1\neq 2^\alpha. \end{aligned}$$

当 $m=3$ 时有

$$\begin{aligned} n &= 2^\alpha 3=\sum_{d|2^\alpha 3}S^*(d)=\sum_{d|2^\alpha}S^*(d)+\sum_{d|2^\alpha}S^*(3d)\\ &= 2\alpha+1+1+3\sum_{d|2^\alpha}1-3=1+2d(2^{\alpha-1})=3\alpha+2, \end{aligned}$$

显然 $2^\alpha 3\neq 3\alpha+2$. 因此 $n=2^\alpha 3$ 不满足 (2-4) 式. 现在不妨设

$$S^*(n)=S^*(2^\alpha m)=u,$$

其中奇数 $m>3$.

若 $u=2$, 则当 n 满足 (2-4) 式时应有

$$\begin{aligned} n &= 2^\alpha m=\sum_{d|n}S^*(d)=\sum_{d|m}S^*(d)+\sum_{d|\frac{n}{2}}S^*(2d)\\ &= \sum_{d|m}1+\sum_{d|\frac{n}{2}}2=d(m)+d\left(\frac{n}{2}\right). \end{aligned}$$

即 $2^\alpha m=d(m)+d\left(2^{\alpha-1}m\right)$. 但当 $m>3$ 时

$$2^\alpha m>d(m)+d\left(2^{\alpha-1}m\right).$$

若 $u=3$, 则 $3|m$. 于是当 n 满足 (2-4) 式时有

$$\begin{aligned} n &= 2^\alpha m=\sum_{d|n}S^*(d)=\sum_{d|m}S^*(d)+\sum_{d|\frac{n}{2}}S^*(2d)\\ &\leq \sum_{d|m}1+\sum_{d|\frac{n}{6}}3+\sum_{d|\frac{n}{6}}3=d(m)+6d\left(\frac{n}{6}\right). \end{aligned}$$

即 $2^\alpha m\leq d(m)+6d\left(\dfrac{n}{6}\right)$. 但当 $m\geq 3$ 时

$$n=2^\alpha m>d(m)+6d\left(\frac{n}{6}\right).$$

若 $u\geq 4$, 则 $3|m$. 由于 $u!|n=2^\alpha m$, 所以

$$\alpha \geq \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{u}{2^i}\right]. \tag{2-6}$$

于是当 $u = 4$ 且 n 满足 (2-4) 式时应有

$$\begin{aligned} n &= 2^\alpha m = \sum_{d|n} S^*(d) = \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{d|m} S^*(2^i d) \\ &\leq \sum_{d|m} 1 + \sum_{d|m} 3 + (\alpha - 1) \sum_{d|m} 4 \\ &\leq 4d(m) + 4(\alpha - 1)d(m), \end{aligned}$$

即 $2^\alpha m \leq 4\alpha d(m)$. 但当 $\alpha \geq 3$, $m > 3$ 时这一不等式是不成立的.

当 $u \geq 5$ 时, 一定有 $3|m$ 及 $5|m$, 即奇数 $m \geq 15$, 此时容易推出

$$15d(m) \leq 4m. \tag{2-7}$$

因而当 n 满足 (2-4) 式时应有

$$\begin{aligned} n &= 2^\alpha m = \sum_{d|n} S^*(d) = \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{d|m} S^*(2^i d) \\ &\leq \sum_{d|m} 1 + \sum_{d|m} 3 + (\alpha - 1) \sum_{d|m} u \\ &\leq 4d(m) + u(\alpha - 1)d(m) \leq (u\alpha - 1)d(m). \end{aligned}$$

即

$$2^\alpha m \leq (u\alpha - 1)d(m).$$

由 (2-6) 式知

$$\alpha \geq \frac{u-1}{2} + \frac{u-1}{4} = \frac{3u-3}{4}.$$

于是结合上式及 (2-7) 式可得

$$2^\alpha 15 \leq 4(u\alpha - 1) \leq 4\left[\alpha\left(\frac{4\alpha}{3} + 1\right) - 1\right].$$

但当 $\alpha \geq 3$ 时这一不等式是不成立的.

结合以上四种情况就完成了定理的证明.

2.4 关于 Smarandache 对偶函数 $S^{**}(n)$

通过研究可以发现函数 $S^{**}(n)$ 与 $S^*(n)$ 有着非常相似的性质. 在本节中, 我们的主要目的就是想说明这一点, 即利用初等方法研究 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{S^{**}(n)}{n^s}$ 的敛散性, 并给出一个恒等式. 具体地说就是要证明下面的

定理 2.4.1 对于任意实数 $s>1$, 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}$$

是收敛的, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}=\zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^s}\right)+\zeta(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m)!!)^s},$$

其中 $\zeta(s)$ 是Riemann zeta-函数.

证明: 首先如果 $s>1$, 由 $S^{**}(n)<<\ln n$ 可得 Dirichlet 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}$ 是收敛的, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}=\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}+\sum_{\substack{n=1\\2|n}}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}.$$

由 $S^{**}(n)$ 的定义知当 n 为奇数时, 如果 $S^{**}(n)=2m-1$，则 $(2m-1)!!\mid n$. 令 $n=(2m-1)!!\cdot n_1$ 且 $(2m+1)\dagger n_1$. 那么对于任意实数 $s>1$, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n\\S^{**}(n)=2m-1}}^{\infty}\frac{2m-1}{n^s}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n\\(2m+1)\dagger n}}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m-1)!!)^s\cdot n^s}\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m-1)!!)^s}\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n\\(2m+1)\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m-1)!!)^s}\right)\left(\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^s\cdot n^s}\right)\\
&= \left(\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m-1)!!)^s}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m+1)!!)^s}\right)\\
&= \left(\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m+1}{((2m+1)!!)^s}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m+1)!!)^s}\right)\\
&= \left(\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^s}\right)
\end{aligned}$$

$$= \zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^s}\right). \tag{2-8}$$

当 n 为偶数时, 如果 $S^{**}(n)=2m$, 则 $(2m)!!\mid n$. 现在令 $n=(2m)!!\cdot n_2$ 且 $(2m+2)\dagger n_2$. 那么对于任意实数 $s>1$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n=1\\2|n}}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\2|n\\S^{**}(n)=2m}}^{\infty}\frac{2m}{n^s}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\(2m+2)\dagger n}}^{\infty}\frac{2m}{((2m)!!)^s\cdot n^s} \qquad (2\text{-}9)\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m}{((2m)!!)^s}\sum_{\substack{n=1\\(2m+2)\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m}{((2m)!!)^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+2)^s\cdot n^s}\right)\\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m}{((2m)!!)^s}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m}{((2m+2)!!)^s}\right)\\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+2)!!)^s}\right)\\
&= \zeta(s)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+2)!!)^s}\right)\\
&= \zeta(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m)!!)^s}. \qquad (2\text{-}10)\end{aligned}$$

结合 (2-8) 式和 (2-9) 式得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s} &= \sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}+\sum_{\substack{n=1\\2|n}}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}\\
&= \zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^s}\right)+\zeta(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m)!!)^s}.\end{aligned}$$

于是完成了定理的证明.

由定理可得到下面的

推论 2.4.1　当 $s=2,\ 4$ 时, 有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^2}=\frac{\pi^2}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m+1)!!)^2}+\frac{\pi^2}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m)!!)^2}+\frac{\pi^2}{8},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^4}=\frac{\pi^4}{48}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m+1)!!)^4}+\frac{\pi^4}{45}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m)!!)^4}+\frac{\pi^4}{96}.$$

证明: 在定理 2.4.1 中取 $s=2,\ 4$, 注意到 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$ 及 $\zeta(4)=\dfrac{\pi^4}{90}$ (参阅文献 [4]) 容易得出下面的式子

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^2} &= \zeta(2)\cdot\frac{3}{4}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^2}\right)+\zeta(2)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m)!!)^2}\\ &= \frac{\pi^2}{8}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^2}\right)+\frac{\pi^2}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m)!!)^2}\\ &= \frac{\pi^2}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m+1)!!)^2}+\frac{\pi^2}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m)!!)^2}+\frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^4}=\frac{\pi^4}{48}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m+1)!!)^4}+\frac{\pi^4}{45}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m)!!)^4}+\frac{\pi^4}{96}.$$

于是完成了推论的证明.

2.5 一个包含 $SM(n)$ 函数的方程

容易验证数论函数 $SM(n)$ 是 Smarandache 可乘函数. 关于它的初等性质, 我们了解得很少, 在文献 [2] 中曾经介绍了以下性质

$$\sum_{n\le x}(SM(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

本节的主要目的是研究一个包含 $SM(n)$ 函数的方程的可解性, 即求方程

$$\sum_{d|n}SM(d)=n \tag{2-11}$$

的所有正整数解, 其中 $\sum\limits_{d|n}$ 表示对 n 的所有正因子求和. 显然存在无限多个正整数 n 使得 $\sum\limits_{d|n}SM(d)>n$. 例如取 $n=p$ 为素数, 则 $\sum\limits_{d|n}SM(d)=1+p>p$. 同时又有无限多个正整数 n 使得 $\sum\limits_{d|n}SM(d)<n$. 事实上取 $n=pq$, p 和 q 为两个不同的奇素数且 $p<q$, 则有 $\sum\limits_{d|n}SM(d)=1+p+2q<pq$. 于是我们自然想知道到底有多少个正整数 n 能满足 (2-11) 式? 在本节中我们将要解决这个问题, 就是要证明下面的

定理 2.5.1 对任意正整数 n, 方程 (2-11) 成立当且仅当 $n=1$, 28.

证明: 首先, 证明几种特殊情况

(i) 当 $n=1$ 时,$\sum\limits_{d|n} SM(d)=SM(1)=1$, 得 $n=1$ 是方程 (2-11) 的解.

(ii) 当 $n=p^\alpha$ 为素数方幂时 (2-11) 式不成立. 事实上这时若 (2-11) 式成立, 则由函数 $SM(n)$ 的定义可得

$$\sum_{d|n} SM(d)=\sum_{d|p^\alpha} SM(d)=1+p+2p+\cdots+\alpha p=p^\alpha. \tag{2-12}$$

显然 (2-12) 式右边是 p 的倍数, 而左边不是 p 的倍数, 矛盾. 所以当 n 为素数方幂时 (2-11) 式不成立.

(iii) 当 $n>1$ 且 n 的最小素因子的方幂为 1 时, 若 $n=p_1p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}=p_1n_1$ 且满足 (2-11) 式, 则由结论 (ii) 知 $k\geq 2$. 于是由 $SM(n)$ 的定义可得

$$\sum_{d|n} SM(d)=\sum_{d|n_1} SM(d)+\sum_{d|n_1} SM(p_1d)=2\sum_{d|n_1} SM(d)+p_1-1=p_1n_1. \tag{2-13}$$

显然 (2-13) 式两边的奇偶性相反, 矛盾. 此时 (2-11) 式不成立.

由结论 (iii) 立刻得到: 如果 n 为无平方因子数, 则 n 不可能满足 (2-11) 式.

现在证明一般情况. 假定整数 $n>1$ 满足方程 (2-11), 由结论 (ii) 及 (iii) 知 n 至少有两个不同的素因子, 而且 n 的最小素因子的方幂大于 1. 于是可设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_1>1$, $k\geq 2$. 设 $SM(n)=\alpha p$. 下面分几种情况进行讨论

(A) $\alpha=1$. 此时 p 必定为 n 的最大素因子, 令 $n=n_1p$, 注意到当 $d|n_1$ 时有 $SM(d)\leq p-1$, 于是由 $\sum\limits_{d|n} SM(d)=n$ 可得

$$\begin{aligned} n_1p &= n=\sum_{d|n_1p} SM(d)=\sum_{d|n_1} SM(d)+\sum_{d|n_1} SM(dp) \\ &= \sum_{d|n_1} SM(d)+\sum_{d|n_1} p\leq 1+\sum_{\substack{d|n_1\\ d>1}}(p-1)+pd(n_1) \\ &= 2+(2p-1)d(n_1)-p, \end{aligned} \tag{2-14}$$

或者

$$n_1+1<2d(n_1), \tag{2-15}$$

其中 $d(n_1)$ 为 Dirichlet 除数函数. (2-15) 式当 $n_1\geq 7$ 时显然不成立. 于是 $2\leq n_1\leq 6$. 又由于 n_1 的最小素因子的方幂大于 1, 所以 $n_1=4$. 从而 $n=n_1p=4p$, $p>3$. 此时由

$$4p = \sum_{d|4p} SM(d)=SM(1)+SM(2)+SM(4)+SM(p)+SM(2p)+SM(4p)$$

$$= \quad 1+2+4+3p,$$

立刻推出 $p=7$ 即 $n=28$.

(B) $SM(n)=\alpha p$ 且 $\alpha>1$. 此时设 $n=n_1p^\alpha,(n_1,p)=1$. 若 n 满足 (2-11) 式, 则有

$$n=p^\alpha n_1=\sum_{i=0}^{\alpha}\sum_{d|n_1}SM(p^i d).$$

当 $1<n_1<8$ 时, 我们来分析方程 (2-11) 的情况.

(a) 若 $n_1=2$, 即 $n=2p^\alpha(p>2)$, 由 (iii) 的讨论知, $n=2p^\alpha$ 不是方程 (2-11) 的解;

(b) 若 $n_1=3$ 时, $n=3p^\alpha$. 由于 $(n_1,p)=1$, 有 $p\neq 3$.

若 $p=2,n=3\cdot 2^\alpha$ 满足方程 (2-11), 即

$$\sum_{d|3\cdot 2^\alpha}SM(d)=\sum_{d|2^\alpha}SM(d)+\sum_{d|2^\alpha}SM(3d)=2\sum_{d|2^\alpha}SM(d)+3=3\cdot 2^\alpha,$$

上式中 $2\sum\limits_{d|2^\alpha}SM(d)+3$ 是奇数, 而 $3\cdot 2^\alpha$ 是偶数. 所以, $n=3\cdot 2^\alpha$ 不是方程 (2-11) 的解;

若 $p>3$, 即 $n=3\cdot p^\alpha$ 满足方程 (2-11), 则 n 最小素因子的指数为 1, 由 (iii) 知, $n=3\cdot p^\alpha$ 不是方程 (2-11) 的解.

因此 $n=3\cdot p^\alpha(p\neq 3)$ 不是方程 (2-11) 的解.

(c) 当 $n_1=4$ 时, $n=4\cdot p^\alpha(p\geq 3)$, 有

$$\sum_{d|4\cdot p^\alpha}SM(d)=\sum_{d|p^\alpha}SM(d)+\sum_{d|p^\alpha}SM(2d)+\sum_{d|p^\alpha}SM(4d),$$

若 $p=3$, 即 $n=4\cdot 3^\alpha$ 满足方程 (2-11), 则

$$\sum_{d|4\cdot 3^\alpha}SM(d)=\sum_{d|3^\alpha}SM(d)+\sum_{d|3^\alpha}SM(2d)+\sum_{d|3^\alpha}SM(4d)=3\sum_{\substack{d|3^\alpha\\ d>1}}SM(d)+12=4\cdot 3^\alpha,$$

由于 $3^2\mid 3\sum\limits_{\substack{d|3^\alpha\\ d>1}}SM(d)$, 而且 $3^2\mid 4\cdot 3^\alpha$, 从而 $3^2\mid 12$. 这是不可能的.

若 $p>3$, 即 $n=4\cdot p^\alpha$ 满足方程 (2-11), 则

$$\begin{aligned}\sum_{d|4\cdot p^\alpha}SM(d) &= \sum_{d|p^\alpha}SM(d)+\sum_{d|p^\alpha}SM(2d)+\sum_{d|p^\alpha}SM(4d)=3\sum_{d|p^\alpha}SM(d)+8\\ &= \frac{3}{2}\alpha(\alpha+1)p+11=4\cdot p^\alpha,\end{aligned}$$

即

$$4\cdot 3^\alpha-\frac{3}{2}\alpha(\alpha+1)p+11=0.$$

现在固定 α, 取 $f(x)=4\cdot x^\alpha-\dfrac{1}{2}\alpha(\alpha+1)x+11$, 当 $x\geq 3$ 时, $f(x)$ 是递增函数, 即

$$f(x)\geq f(3)=4\cdot 3^\alpha-\frac{3}{2}\alpha(\alpha+1)+11=g(\alpha).$$

又由于 $\alpha\geq 2$ 时, $g(\alpha)$ 是关于 α 的递增函数. 则有

$$f(x)\geq f(3)=g(\alpha)\geq g(2)>0,$$

所以, 当 $x\geq 3$ 时, $f(x)=0$ 无解. 从而得到 $p>3$ 时, 方程 (2-11) 无解.

(d) 当 $n_1=5$ 时, 有 $n=5\cdot p^\alpha(p\neq 5)$.

若 $p>5$, 则由 (iii) 知, $n=5\cdot p^\alpha$ 不是方程 (2-11) 的解;

若 $p=2$, 由于

$$\sum_{d|5\cdot 2^\alpha}SM(d)=\sum_{d|2^\alpha}SM(d)+\sum_{d|2^\alpha}SM(5d)=2\sum_{\substack{d|2^\alpha\\ d>1}}SM(d)+10=5\cdot 2^\alpha,$$

这里 $2^2\mid 2\sum\limits_{\substack{d|2^\alpha\\ d>1}}\overline{S}(d)$, 又 $2^2\mid 5\cdot 2^\alpha$, 从而有 $2^2\mid 10$, 这是不可能的. 故 $n=5\cdot 2^\alpha$ 不满足方程 (2-11);

若 $p=3$, 由于

$$\sum_{d|5\cdot 3^\alpha}SM(d)=\sum_{d|3^\alpha}SM(d)+\sum_{d|3^\alpha}SM(5d)=2\sum_{d|3^\alpha}SM(d)+6,$$

这里 $2\sum\limits_{d|3^\alpha}SM(d)+6$ 是偶数, 而 $5\cdot 3^\alpha$ 是奇数. 因此, $n=5\cdot 3^\alpha$ 不满足方程 (2-11).

(e) 当 $n_1=6$ 时 $n=2\cdot 3\cdot p^\alpha$, 由 (iii) 的讨论知, n 不满足方程 (2-11).

(f) 当 $n_1=7$ 时, 有 $n=7\cdot p^\alpha(p\neq 7)$.

若 $p>7$, 则由 (iii) 知, $n=7\cdot p^\alpha$ 不是方程 (2-11) 的解;

若 $p=2$, 此时必有 $\alpha\geq 4$. 由于

$$\sum_{d|7\cdot 2^\alpha}SM(d)=\sum_{d|2^\alpha}SM(d)+\sum_{d|2^\alpha}SM(7d)=2\sum_{d|2^\alpha}SM(d)+15,$$

这里 $2\sum\limits_{d|2^\alpha}SM(d)+15$ 是奇数, 而 $n=7\cdot 2^\alpha$ 是偶数. 故 $n=7\cdot 2^\alpha$ 不满足方程 (2-11);

若 $p=3$, 由于

$$\sum_{d|7\cdot 3^\alpha}SM(d)=\sum_{d|3^\alpha}SM(d)+\sum_{d|3^\alpha}SM(7d)=2\sum_{\substack{d|3^\alpha\\ d>1}}SM(d)+13,$$

上式中 $3 \mid 2\sum\limits_{\substack{d|3^\alpha\\d>1}} SM(d)$, 且 $3 \mid 7\cdot 3^\alpha$, 如果满足方程 (2-11), 必有 $3 \dagger 13$, 矛盾. 于是 $n = 7\cdot 3^\alpha$ 也不是方程 (2-11) 的解;

若 $p = 5$, 由于

$$\sum_{d|7\cdot 5^\alpha} SM(d) = \sum_{d|5^\alpha} SM(d) + \sum_{d|5^\alpha} SM(7d) = 2\sum_{d|5^\alpha} SM(d) + 8,$$

上式中 $2\sum\limits_{d|5^\alpha} SM(d)+8$ 是偶数, 而 $7\cdot 5^\alpha$ 是奇数. 于是 $n = 7\cdot 5^\alpha$ 也不是方程 (2-11) 的解.

(g) 当 $n_1 \geq 8$ 时, 有 $n = n_1\cdot p^\alpha$, 且 $p^\alpha > \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}p$, 则

$$\sum_{d|n_1\cdot p^\alpha} SM(d) < SM(p^\alpha)d(n_1p^\alpha) = \alpha(\alpha+1)pd(n_1) \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}pn_1 < p^\alpha n_1 = n,$$

则当 $n_1 \geq 8$ 时, $n = n_1p^\alpha$ 也不是方程 (2-11) 的解.

综合以上所有情况可得方程 (2-11) 有且仅有两个解, 即 $n = 1, 28$. 于是完成了定理的证明.

2.6 一个包含 Smarandache 对偶函数的方程

本节的主要目的是利用初等方法研究一类包含 Smarandache 对偶函数方程的可解性问题. 设 n 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots\ p_k^{\alpha_k}$, 我们定义 $\omega(n)$ 为 n 的所有不同素因子的个数, 不包括素因子的重数, 即 $\omega(n) = k$. $\Omega(n)$ 定义为 n 的所有素因子个数和, 即 $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$. 我们考虑是否存在正整数 n 满足方程

$$\sum_{d|n} S^*(d) = \omega(n)\Omega(n). \tag{2-16}$$

本节要解决这一问题, 即求得该方程的所有正整数解. 具体地说就是证明了下面的

定理 2.6.1 *方程 $\sum\limits_{d|n} S^*(d) = \omega(n)\Omega(n)$ 有且仅有以下三种形式的解*

1. $n = p_1^\alpha p_2$ *或者* $n = p_1p_2^\beta$. *其中* $2 < p_1 < p_2, \alpha \geq 1, \beta \geq 1$
2. $n = p_1^2p_2p_3$ *或者* $n = p_1p_2^2p_3$ *或者* $n = p_1p_2p_3^2$
3. $n = p_1p_2p_3p_4$, *其中* $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ *为奇素数.*

证明: 容易验证当 $n = 1$ 时,

$$\sum_{d|n} S^*(d) = S^*(1) = 1,$$

同时

$$\omega(n)\Omega(n) = 0.$$

等式 (2-16) 不成立, 所以 $n = 1$ 不是方程 (2-16) 的正整数解.

现在假定 $n > 1$, 我们对 (2-16) 式分下面几种情况讨论

(i) 当 n 为奇数时, 设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots\ p_k^{\alpha_k}$, 此时显然对任意 $d|n$ 有 $2!$ 不整除 n, 所以 $S^*(d) = 1$. 于是当 $n > 1$ 且满足 (2-16) 式时有

$$\sum_{d|n} S^*(d) = \sum_{d|n} 1 = d(n) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots\ (1+\alpha_k),$$

同时

$$\omega(n)\Omega(n) = k(\alpha_1 + \alpha_1 + \cdots\ + \alpha_k),$$

其中 $d(n)$ 表示 Dirichlet 除数函数.

下面对 k 的取值进行讨论

(a) 当 $k = 2$ 时,

$$\sum_{d|n} S^*(d) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1), \quad \omega(n)\Omega(n) = 2(\alpha_1 + \alpha_2).$$

解方程 $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$ 得 $\alpha_1 = 1$ 或者 $\alpha_2 = 1$. 所以 $n = p_1^{\alpha} p_2$ 或者 $n = p_1 p_2^{\beta}$, 其中 $2 < p_1 < p_2, \alpha \geq 1, \beta \geq 1$.

(b) 当 $k = 3$ 时, 满足方程 (2-16) 的等式为

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) = 3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3). \tag{2-17}$$

下面对 (2-17) 式中的每个 α_i 是否取 1 进行讨论, 其中 $1 \leq i \leq 3$.

当 (2-17) 式中仅有一个 α_i 为 1 时, 不妨设 $\alpha_1 = 1$, 则 (2-17) 式左边变为 $2(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)$. 同时 (2-17) 式右边变为 $3(1 + \alpha_2 + \alpha_3)$. 容易证明 (2-17) 式左边总是大于右边, 所以方程 (2-16) 在此种情况下无解.

当 (2-17) 式中仅有两个 α_i 为 1 时, 不妨设 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$, 解等式 (2-17) 可得 $\alpha_3 = 2$. 所以方程 (2-16) 在此种情况下的解为 $n = p_1^2 p_2 p_3$ 或者 $n = p_1 p_2^2 p_3$ 或者 $n = p_1 p_2 p_3^2$.

当三个 α_i 均为 1 时, 等式 (2-17) 不成立. 所以方程 (2-16) 在此种情况下无解.

当三个 α_i 均大于 1 时, 可以证明下面的不等式

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) > 3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

成立. 即

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 + 1) > (2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3).$$

用上述不等式的左边减右边可得

$$\begin{aligned} & (\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3+1)-2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \\ = & \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1(\alpha_2-2)+\alpha_2(\alpha_3-2)+\alpha_3(\alpha_1-2)+1 \\ \geq & \alpha_1\alpha_2\alpha_3+1>0. \end{aligned}$$

这就证明了 (2-17) 式左边总是大于右边, 所以方程 (2-16) 在此种情况下无解.

(c) 当 $k=4$ 时, 满足方程 (2-16) 的等式为

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)=4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) \tag{2-18}$$

下面对 (2-18) 式中的每个 α_i 是否取 1 进行讨论, 其中 $1\leq i\leq 4$.

当 (2-18) 式中的四个 α_i 均为 1 时, 等式 (2-18) 成立. 所以方程 (2-16) 在这种情况下的解为 $n=p_1p_2p_3p_4$.

当 (2-18) 式中仅有三个 α_i 为 1 时, 不妨设 $\alpha_1=1,\alpha_2=1,\alpha_3=1$ 且 $\alpha_4>1$, 等式 (2-18) 式不成立. 所以方程 (2-16) 在这种情况下无解.

当 (2-18) 式中仅有两个 α_i 为 1 时, 不妨设 $\alpha_1=1,\alpha_2=1$, 且 $\alpha_3>1,\alpha_4>1$, 等式 (2-18) 式不成立. 所以方程 (2-16) 在这种情况下无解.

当 (2-18) 式中仅有一个 α_i 为 1 时, 不妨设 $\alpha_1=1$, 且 $\alpha_2>1,\alpha_3>1,\alpha_4>1$,

将 $\alpha_1=1$ 代入 (2-18) 式得 $2(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)=4(1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$

将等式两边化简为

$$\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4=1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4.$$

由于 $\alpha_2>1,\alpha_3>1,\alpha_4>1$, 容易看出上述等式的左边总是大于右边. 所以 (2-18) 式左边总是大于右边. 因此方程 (2-16) 在此种情况下无解.

当 (2-18) 式中四个 α_i 均大于 1 时, 由于当 $\alpha_1>1,\alpha_2>1$ 时, $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)>2(\alpha_1+\alpha_2)$.

同理可知, 当 $\alpha_3>1,\alpha_4>1$ 时, $(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)>2(\alpha_3+\alpha_4)$.

所以

$$\begin{aligned} & (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1) \\ > & 4(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_4) \\ = & 4(\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4) \\ > & 4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4). \end{aligned}$$

因此, 等式 (2-18) 左边总是大于右边. 所以方程 (2-16) 在此种情况下无解.

(d) 当 $k>4$, 且 $1\leq i\leq k$. 可以证明方程 (2-16) 的左边总是大于右边.

即

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)+\cdots+(\alpha_k+1)>k(\alpha_1+\cdots+\alpha_k).$$

所以方程 (2-16) 在此种情况下无解.

下面用数学归纳法证明. 设 $k=i$ 时, 上述不等式成立. 即

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)+\cdots+(\alpha_i+1)>i(\alpha_1+\cdots+\alpha_i)$$

当 $k=i+1$ 时

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)+\cdots+(\alpha_i+1)(\alpha_{i+1}+1)>i(\alpha_1+\cdots+\alpha_i)(\alpha_{i+1}+1).$$

又因为

$$\begin{aligned}
& i(\alpha_1+\cdots+\alpha_i)(\alpha_{i+1}+1)-(i+1)(\alpha_1+\cdots+\alpha_i+\alpha_{i+1}) \\
= & i(\alpha_1+\cdots+\alpha_i)(\alpha_{i+1}+1)-i(\alpha_1+\cdots+\alpha_i) \\
& -i\alpha_{i+1}-(\alpha_1+\cdots+\alpha_i)-\alpha_{i+1} \\
= & (i\alpha_{i+1}-1)(\alpha_1+\cdots+\alpha_i)-(i+1)\alpha_{i+1} \\
> & (i\alpha_{i+1}-1)(\alpha_1+\cdots+\alpha_i)-(i+1)(i\alpha_{i+1}-1) \\
= & (i\alpha_{i+1}-1)(\alpha_1+\cdots+\alpha_i-i-1)>0.
\end{aligned}$$

所以, 当 $k=i+1$ 时, 不等式亦成立.

(ii) 当 n 为偶数时, 设 $n=2^{\alpha}m$, 且 m 为奇数, 设 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots\ p_k^{\alpha_k}$. 容易推出

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n}S^*(d) &= \sum_{d|\frac{n}{2}}S^*(d)+\sum_{d|\frac{n}{2}}S^*(2d) \\
&\geq \sum_{d|\frac{n}{2}}1+\sum_{d|\frac{n}{2}}2 \\
&= 3d(\frac{n}{2}).
\end{aligned}$$

同时

$$\omega(n)\Omega(n)=(k+1)(\alpha+\alpha_1+\alpha_1+\cdots\ +\alpha_k).$$

下面可以证明

$$3d(\frac{n}{2})=3\alpha(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)>(k+1)(\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_k). \quad (2\text{-}19)$$

(a) 当 $k=2$ 时, 容易验证不等式 (2-19) 成立.

(b) 当 $k=3$ 时, 将不等式 (2-19) 两边展开比较, 可以验证不等式 (2-19) 成立.

(c) 当 $k>3$ 时, 也可以验证不等式 (2-19) 成立, 证明方法类似于在讨论 n 为奇数且 $k>4$ 的情形, 同样可用数学归纳法得到证明结果.

所以, 在此种情况下方程也无解.

结合以上几种情况我们完成了定理的证明.

第三章　关于 $SL(n)$ 函数及其对偶函数的性质

有不少学者对函数 $SL(n)$ 的相关问题作了一系列研究, 并取得了十分重要的结果. 在本章中我们将利用初等及解析方法来进一步研究有关 $SL(n)$ 函数的均值分布等问题. 此外, 我们还将引入一个新的 Smarandache 函数 $\overline{SL}(n)$, 并给出这个函数的相关结果.

3.1　引言

定义 3.1　对任意正整数 n, Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 k, 使得 $n \mid [1,\ 2,\ \cdots,\ k]$, 这里 $[1,\ 2,\ \cdots,\ k]$ 表示 $1, 2, \cdots, k$ 的最小公倍数.

定义 3.2　对任意的正整数 n, 新的 Smarandache 可乘函数 $\overline{SL}(n)$ 定义如下: $\overline{SL}(1)=1$, 当 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式时

$$\overline{SL}(n)=\min\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_k^{\alpha_k}\}.$$

定义 3.3　对任意正整数 n, Smarandache LCM 函数的对偶函数 $SL^*(n)$ 定义为最大的正整数 k, 使得 $[1,\ 2,\ \cdots,\ k] \mid n$, 这里 $[1,\ 2,\ \cdots,\ k]$ 表示 $1, 2, \cdots,$ k 的最小公倍数.

下面给出 $SL(n)$ 函数的一些简单性质. 为方便起见, 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解式.

性质 3.1　对任意的正整数 n, 有

$$SL(n)=\max_{1\le i\le k}\{p_i^{\alpha_i}\}. \tag{3-1}$$

特别地, $SL(p^\alpha)=p^\alpha$.

性质 3.2　对任意素数 p, 有

$$SL(p)=S(p). \tag{3-2}$$

性质 3.3　当 $n=12$ 或者 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}p$ 时有

$$SL(n)=S(n),\quad S(n)\ne n, \tag{3-3}$$

其中 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_r,\ p$ 表示不同的素数, 而 $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_r$ 是满足 $p>p_i^{\alpha_i}$, $i=1,\ 2,\cdots,\ r$ 的正整数.

3.2　$SL(n)$ 函数的渐近公式

本节的主要目的是用初等方法研究函数 $SL(n)$ 的均值性质, 得到一个较强的渐近公式. 即就是证明下面的

定理 3.2.1 设 $k\geq 2$ 为一个固定的整数, 那么对于任意的实数 $x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} SL(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中 c_i $(i=2,\ 3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

证明: 事实上对于任意正整数 $n>1$, 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为 n 的标准分解式, 则有 (参阅文献 [7])

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_s^{\alpha_s}\}. \tag{3-4}$$

现在来考虑和式

$$\sum_{n\leq x} SL(n)=\sum_{n\in A} SL(n)+\sum_{n\in B} SL(n), \tag{3-5}$$

这里把区间 $[1,\ x]$ 内的整数分成两个集合 A 和 B. 集合 A 表示所有的正整数 $n\in[1,\ x]$ 满足: 存在一个素数 p 使得 $p|n$ 并且 $p>\sqrt{n}$; 集合 B 表示区间 $[1,\ x]$ 内的所有正整数 $n\notin A$. 从 (3-4) 和 A 的定义有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A} SL(n) &= \sum_{\substack{n\leq x\\ p|n,\ \sqrt{n}<p}} SL(n)=\sum_{\substack{pn\leq x\\ n<p}} SL(pn)\\ &= \sum_{\substack{pn\leq x\\ n<p}} p=\sum_{n\leq\sqrt{x}}\sum_{n<p\leq\frac{x}{n}} p.\end{aligned} \tag{3-6}$$

利用 Abel 求和公式和素数定理有

$$\begin{aligned}\sum_{n<p\leq\frac{x}{n}} p &= \frac{x}{n}\cdot\pi\left(\frac{x}{n}\right)-n\cdot\pi(n)-\int_n^{\frac{x}{n}}\pi(y)dy\\ &= \frac{x^2}{2n^2\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^2\cdot\ln^i n}{n^2\cdot\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{n^2\cdot\ln^{k+1} x}\right),\end{aligned} \tag{3-7}$$

这里我们用到了估计式 $n\leq\sqrt{x}$, 其中 b_i 是可计算的常数.

注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^i n}{n^2}$ 对于所有的 $i=2,\ 3,\ \cdots,\ k$ 是收敛的. 由 (3-6) 和 (3-7) 我们有

$$\sum_{n\in A} SL(n) = \sum_{n\leq\sqrt{x}}\left(\frac{x^2}{2n^2\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^2\cdot\ln^i n}{n^2\cdot\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{n^2\cdot\ln^{k+1} x}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right), \tag{3-8}$$

这里 c_i $(i=2,\ 3,\cdots,k)$ 是可计算的常数.

现在我们估计和式在集合 B 中的情况. 注意到对任意的正整数 α, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}$ 收敛, 于是从 (3-4) 和集合 B 的定义有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in B}SL(n) &= \sum_{\substack{n\le x\\ SL(n)=p,\ p\le\sqrt{n}}}p+\sum_{\substack{n\le x\\ SL(n)=p^\alpha,\ \alpha>1}}p^\alpha\\
&\ll \sum_{\substack{n\le x\\ p|n,\ p\le\sqrt{n}}}p+\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\sum_{p\le x}\sum_{np^\alpha\le x}p^\alpha\\
&\ll \sum_{n\le x}\sum_{p\le\min\{n,\ \frac{x}{n}\}}p+\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\sum_{n\le x}\sum_{p\le\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}p^\alpha\\
&\ll \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}\cdot\ln x\ll x^{\frac{3}{2}}.\end{aligned} \tag{3-9}$$

结合 (3-5), (3-8) 和 (3-9) 可推出

$$\sum_{n\le x}SL(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

这里 c_i $(i=2,\ 3,\cdots,k)$ 为可计算的常数. 于是完成了定理的证明.

从定理可以推出下面的

推论 3.2.1 对任意实数 $x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}SL(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

3.3 关于 $SL(n)$ 函数的一个方程

本节主要研究一类包含 Smarandache LCM 函数的方程的可解性问题, 即寻求所有使得方程

$$\sum_{d|n}SL(d)=n \tag{3-10}$$

成立的正整数 n, 其中 $\sum_{d|n}$ 表示对 n 的所有正因数求和. 显然存在无限多个正整数 n 使得 $\sum_{d|n} SL(d) > n$. 事实上, 当 $n = p^\alpha$ 为素数方幂时, 有

$$\sum_{d|n} SL(d) = \sum_{d|p^\alpha} SL(d) = 1 + p + \cdots + p^\alpha > p^\alpha = n.$$

同时又存在无限多个正整数 n, 使得 $\sum_{d|n} SL(d) < n$. 例如当 n 为两个不同奇素数的乘积时, 即 $n = p \cdot q$, 其中 $3 \le p < q$ 为素数, 则有

$$\sum_{d|n} SL(d) = \sum_{d|p\cdot q} SL(d) = 1 + p + 2q < p \cdot q = n.$$

那么存在多少个正整数 n 能满足方程 (3-10)? 通过大量的数据检验, 我们发现只有极少数的正整数满足此方程. 本节给出此方程的所有正整数解, 即利用初等方法证明了该方程只有两个正整数解.

为了完成定理的证明, 需要下面一个引理

引理 3.3.1 对于任意正整数 $n > 12600$, 有估计式

$$d(n) \le n^{\frac{9}{20}},$$

其中 $d(n)$ 为 Dirichlet 除数函数, 即 $d(n) = \sum_{d|n} 1$.

证明: 这一引理可以直接验证. 为书写简便不妨设

$$f(n) = \frac{n^{\frac{9}{20}}}{d(n)}.$$

显然为了证明引理, 只需证明当 $n > 12600$ 时 $f(n) > 1$ 即可. 熟知 $f(n)$ 是一个可乘函数, 而且当 $\alpha \ge 2$ 时, $f(2^\alpha)$ 是对正整数 α 递增的; 当素数 $p > q \ge 3$ 时, $f\left(p^\beta\right)$ 对正整数 β 是递增函数且 $f(p) > f(q)$. 注意到当 $\alpha \ge 7$ 时, $f(2^\alpha) > 1$, 当 $\alpha \ge 3$ 时, $f(3^\alpha) > 1$, 当 $\alpha \ge 2$ 时, $f(5^\alpha) > 1$, 当素数 $p \ge 7$ 及整数 $\alpha \ge 1$ 时, $f(p^\alpha) > 1$. 因此在所有正整数中, $f\left(2^2 \cdot 3 \cdot 5\right) = f(60) = \dfrac{(60)^{\frac{9}{20}}}{12}$ 最小. 当 n 至少含有因数 2^8; 3^5; $2^\alpha \cdot 3^\beta$, $\alpha + \beta \ge 9$; $p \ge 17$; p_1^3 $(p_1 \ge 5)$; p_2^2 $(p_2 \ge 7)$; $7 \times p_3$; $11 \times p_3$; $5^2 \times p_3$ $(p_3 \ge 11)$ (其中 p, p_1, p_2, p_3 为素数) 之一时, 不难验证 $f(n) > 1$, 这是因为对于任意这些因数中的一个 d, 都有 $f(d \cdot 60) > 1$, 因此对任意正整数 $n = d \cdot n_1$ 都有 $f(d \cdot n_1) > 1$. 所以在剩下的所有正整数 n 中, n 最多含有 4 个小于或等于 13 的素因子, 而且每个素因数的方幂都很小, 这样经过检验可得 $n = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 12600$ 是最大的不满足 $f(n) > 1$ 的整数. 于是完成了引理的证明.

定理 3.3.1 方程 (3-10) 有且仅有两个正整数解 $n=1,\ 28$.

证明: 容易验证 $n=1,28$ 是方程 (3-10) 的解. 为了证明除了这两个解外, 方程 (3-10) 没有其它正整数解. 设 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}(p_1<p_2<\cdots<p_r)$ 为 n 标准分解式. 首先证明如果 n 满足方程 (3-10), 则 $\alpha_1\geq 2$ 且 $r\geq 2$. 事实上由于 n 不可能是一个素数的方幂, 所以 $r\geq 2$. 如果 $\alpha_1=1$ 且 n 满足方程 (3-10), 设 $n=p_1\cdot n_1$, 则当 $d|n_1$ 且 $d>1$ 时有 $SL(d\cdot p_1)=SL(d)$. 于是

$$\sum_{d|n}SL(d)=\sum_{d|n_1}SL(d)+\sum_{d|n_1}SL(p_1\cdot d)=p_1-1+2\sum_{d|n_1}SL(d)=p_1\cdot n_1.$$

上式两边奇偶性不同, 也就是说当 $p_1=2$ 时, 左边为奇数, 而右边为偶数. 当 $p_1>2$ 时, 左边为偶数, 而右边为奇数, 矛盾. 所以当 n 满足方程 (3-10) 时有 $\alpha_1\geq 2$, 且 $r\geq 2$. 现在设

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_r^{\alpha_r}\}=p^{\alpha}.$$

为方便起见设 $n=n_1\cdot p^{\alpha}$ 满足方程 (3-10). 将 α 分为两种情况来讨论

(i) $\alpha=1$. 即 $n=n_1\cdot p$, 此时显然 p 是 n 的最大素因子, 所以有

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}SL(d) &= \sum_{d|n_1}SL(d)+\sum_{d|n_1}SL(d\cdot p)=\sum_{d|n_1}SL(d)+\sum_{d|n_1}p\\ &= \sum_{d|n_1}SL(d)+p\cdot d(n_1)=n_1\cdot p. \qquad (3\text{-}11)\end{aligned}$$

在 (3-11) 式中, 由于当 $d|n_1$ 时, $SL(d)<p$. 所以由 (3-11) 式可以推出 $2p\cdot d(n_1)>n_1\cdot p$. 或者 $2d(n_1)>n_1$. 容易验证此式当 $n_1=5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$ 或者 $n_1\geq 12$ 时不成立. 又由于 n 的最小素因子的方幂 ≥ 2. 所以在剩下的几个数中只有 $n_1=4$. 当 $n_1=4$ 时 $d(n_1)=3$, 这时 (3-11) 式成为

$$1+2+4+3\cdot p=4\cdot p.$$

解上式可得 $p=7$, 即 $n=28$.

(ii) 当 $\alpha\geq 2$. 这时将 n 分为两种情况:

(A) $p^{\alpha}<n^{\frac{11}{20}}$. 此时当 n 满足方程 (3-10) 时可得不等式:

$$n=\sum_{d|n}SL(d)<\sum_{d|n}n^{\frac{11}{20}}=n^{\frac{11}{20}}\cdot d(n). \qquad (3\text{-}12)$$

即 $n^{\frac{9}{20}}<d(n)$. 由引理以及证明过程可知当 $n>12600$ 或者 n 含有因数 2^8; 3^5; $2^{\gamma}\cdot 3^{\beta}$, $\gamma+\beta\geq 9$; $p\geq 17$; p_1^3 $(p_1\geq 5)$; p_2^2 $(p_2\geq 7)$; $7\times p_3$; $11\times p_3$; $5^2\times p_3$ $(p_3\geq 11)$ (其中 $p,\ p_1,\ p_2,\ p_3$ 为素数) 之一时, 不等式 $n^{\frac{9}{20}}<d(n)$ 不成立. 于是在剩下的所有 $n\leq 12600$ 中, 可以直接验证除了 $n=1,\ 28$ 外, 没有其它 n 满足方程 (3-10). 事

实上, n 仅有很少几种情况: $SL(n)=5^2;\ 3^2;\ 3^3;\ 3^4;\ 2^\alpha,\ 2\le\alpha\le 7$. 若 $SL(n)=5^2$, 则 n 必须表示为 $n=2^\delta\cdot 3^\beta\cdot 5^2\cdot 7^\gamma$, 其中 $\delta=0,\ 2,\ 3,\ 4;\ \beta=0,\ 1,\ 2;\ \gamma=0,\ 1$ 且 $\delta+\beta+\gamma\ne 0$. 经过检验可知这些 n 不满足方程 (3-10); 若 $SL(n)=3^\alpha$, $2\le\alpha\le 4$, 则 n 必可表为 $n=2^\beta\cdot 3^\alpha\cdot 5^\gamma\cdot p^\delta$, 其中 $2^\beta<3^\alpha;\ 5^\gamma<3^\alpha;\ p=7,\ 11$ 或者 13, $\delta=0,\ 1$ 且 $\beta+\gamma+\delta\ne 0$. 而当 $SL(n)=2^\alpha,\ 2\le\alpha\le 7$ 时, n 必可表为 $n=2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma\cdot p^\delta$, 其中 $2^\alpha>3^\beta;\ 2^\alpha>5^\gamma;\ 2^\alpha>p^\delta$ 且 $\beta+\gamma+\delta\ne 0$, $p=7,\ 11$ 或者 13. 无论那一种情况, 可以验证除了 $n=1,\ 28$ 外, 没有其它 n 满足方程 (3-10).

(B) $p^\alpha\ge n^{\frac{11}{20}}$, 此时容易推出 $p^{9\alpha}\ge n_1^{11}$. 因而对任意 $d|n_1$, 有 $SL(d)\le n_1\le p^{\frac{9\alpha}{11}}$. 于是当 n 满足 (3-10) 式时应用性质 3.1 有

$$\begin{aligned}
n_1\cdot p^\alpha &= \sum_{d|n}SL(d)=\sum_{i=0}^{\alpha}\sum_{d|n_1}SL(d\cdot p^i)\\
&= \sum_{0\le i\le\frac{9\alpha}{11}}\sum_{d|n_1}SL(d\cdot p^i)+\sum_{\frac{9\alpha}{11}<i\le\alpha}\sum_{d|n_1}SL(d\cdot p^i)\\
&< \left(1+\left[\frac{9\alpha}{11}\right]\right)\cdot p^{\frac{9\alpha}{11}}\cdot d(n_1)+\left(\sum_{\left[\frac{9\alpha}{11}\right]+1\le i\le\alpha}p^i\right)\cdot d(n_1).
\end{aligned}\tag{3-13}$$

在 (3-13) 式两边同除以 p^α 并注意当 $\alpha\ge 2$ 时有 $\dfrac{\frac{9\alpha}{11}+1}{p^{\frac{2\alpha}{11}}}<\dfrac{5}{2}$ 得到

$$n_1<\left(\sum_{0\le i\le\alpha-\left[\frac{9\alpha}{11}\right]-1}\frac{1}{p^i}+\frac{\frac{9\alpha}{11}+1}{p^{\frac{2\alpha}{11}}}\right)\cdot d(n_1)<4\cdot d(n_1).$$

由证明引理的方法容易验证当 $n_1\ge 36$ 时此式不成立. 当 $n_1\le 35$ 时, 由于 n 中包含的最小素数的方幂大于或等于 2, 所以当 n 满足方程 (3-10) 时, n_1 最多只有九种情况 $n_1=4,8,9,12,16,20,24,25$ 或者 27. 此时 $n=4\cdot p^\alpha, n=8\cdot p^\alpha, 9\cdot p^\alpha, n=12\cdot p^\alpha, n=16\cdot p^\alpha, n=20\cdot p^\alpha, n=24\cdot p^\alpha, n=25\cdot p^\alpha$ 或者 $n=27\cdot p^\alpha$. 现在直接验证这九种情况: 若 $p=3$, 则

$$\begin{aligned}
\sum_{d|4\cdot p^\alpha}SL(d) &= \sum_{d|p^\alpha}SL(d)+\sum_{d|p^\alpha}SL(2d)+\sum_{d|p^\alpha}SL(4d)\\
&= 2-1+4-1+4-3+3\cdot\sum_{d|p^\alpha}SL(d)=4\cdot 3^\alpha.
\end{aligned}$$

上式右边是 3 的倍数, 而左边不是, 矛盾. 所以 $n=4\cdot 3^\alpha$ 不满足方程 (3-10). 当 $n=4\cdot p^\alpha$ 且 $p\ge 5$ 时, 有

$$\sum_{d|4\cdot p^\alpha}SL(d) = \sum_{d|p^\alpha}SL(d)+\sum_{d|p^\alpha}SL(2d)+\sum_{d|p^\alpha}SL(4d)$$

$$= \quad 2-1+4-1+3\cdot\sum_{d|p^\alpha}SL(d)=4\cdot p^\alpha.$$

或者

$$\sum_{d|4\cdot p^\alpha}SL(d)=7+3\cdot\sum_{\substack{d|p^\alpha\\d>1}}SL(d)=28+3\cdot\sum_{\substack{d|p^\alpha\\d>p}}SL(d)=4\cdot p^\alpha.$$

注意到 $p \mid \sum\limits_{\substack{d|p^\alpha\\d>1}}SL(d)$, $p^2 \mid \sum\limits_{\substack{d|p^\alpha\\d>p}}SL(d)$. 所以由上式推出 $p|7$ 及 $p^2|28$, 矛盾. 所以当 $n=4\cdot p^\alpha$ 且 $p\geq 5$ 时, n 不满足方程 (3-10).

若 $n=8\cdot p^\alpha$ 满足方程 (3-10). 则当 $p=3$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{d|8\cdot 3^\alpha}SL(d) &= \sum_{d|3^\alpha}SL(d)+\sum_{d|3^\alpha}SL(2d)+\sum_{d|3^\alpha}SL(4d)+\sum_{d|3^\alpha}SL(8d)\\ &= 17+4\cdot\sum_{d|3^\alpha}SL(d)=8\cdot 3^\alpha.\end{aligned}$$

上式中 $4\cdot\sum\limits_{d|3^\alpha}SL(d)$ 与 $8\cdot 3^\alpha$ 能被 4 整除, 于是得到 $4|17$, 这是不可能的.

当 $p=5$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{d|8\cdot 5^\alpha}SL(d) &= \sum_{d|5^\alpha}SL(d)+\sum_{d|5^\alpha}SL(2d)+\sum_{d|5^\alpha}SL(4d)+\sum_{d|5^\alpha}SL(8d)\\ &= 14+4\cdot\sum_{d|5^\alpha}SL(d)=8\cdot 5^\alpha.\end{aligned}$$

上式中 $4\cdot\sum\limits_{d|5^\alpha}SL(d)$ 与 $8\cdot 5^\alpha$ 能被 4 整除, 但是 $4\dagger 14$.

当 $p=7$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{d|8\cdot 7^\alpha}SL(d) &= \sum_{d|7^\alpha}SL(d)+\sum_{d|7^\alpha}SL(2d)+\sum_{d|7^\alpha}SL(4d)+\sum_{d|7^\alpha}SL(8d)\\ &= 16+4\cdot\sum_{\substack{d|7^\alpha\\d>1}}SL(d)=8\cdot 7^\alpha.\end{aligned}$$

上式中 $4\cdot\sum\limits_{\substack{d|7^\alpha\\d>1}}SL(d)$ 与 $8\cdot 7^\alpha$ 能被 7 整除, 于是得到 $7|16$, 这是不可能的.

当 $p\geq 11$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{d|8\cdot p^\alpha}SL(d) &= \sum_{d|p^\alpha}SL(d)+\sum_{d|p^\alpha}SL(2d)+\sum_{d|p^\alpha}SL(4d)+\sum_{d|p^\alpha}SL(8d)\\ &= 11+4\cdot\sum_{d|p^\alpha}SL(d)=8\cdot p^\alpha.\end{aligned}$$

上式中 $4\cdot\sum\limits_{d|p^\alpha}SL(d)$ 与 $8\cdot p^\alpha$ 能被 4 整除, 于是得到 $4|11$, 这是不可能的. 所以 $n=8\cdot p^\alpha$ 不满足方程 (3-10).

若 $n=9\cdot p^\alpha$ 满足方程 (3-10). 则当 $p=2$ 时, 有 $\alpha\geq 4$. 于是有

$$\begin{aligned}\sum_{d|9\cdot 2^\alpha}SL(d) &= \sum_{d|2^\alpha}SL(d)+\sum_{d|2^\alpha}SL(3d)+\sum_{d|2^\alpha}SL(9d)\\ &= 69+3\cdot\sum_{\substack{d|2^\alpha\\ d\geq 16}}SL(d)=9\cdot 2^\alpha.\end{aligned}$$

上式中显然 $\sum\limits_{\substack{d|2^\alpha\\ d\geq 16}}SL(d)$ 及 $9\cdot 2^\alpha$ 为偶数, 但是 69 为奇数, 矛盾. 所以 $n\neq 9\cdot 2^\alpha$.

当 $p=5$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{d|9\cdot 5^\alpha}SL(d) &= \sum_{d|5^\alpha}SL(d)+\sum_{d|5^\alpha}SL(3d)+\sum_{d|5^\alpha}SL(9d)\\ &= 32+3\cdot\sum_{\substack{d|5^\alpha\\ d>5}}SL(d)=9\cdot 5^\alpha.\end{aligned}$$

上式中显然 $\sum\limits_{\substack{d|5^\alpha\\ d>5}}SL(d)$ 及 $9\cdot 5^\alpha$ 为 5 的倍数, 但是 32 不是 5 的倍数, 矛盾. 所以 $n\neq 9\cdot 5^\alpha$.

当 $p=7$ 时, 经简单计算可得

$$36+3\cdot\sum_{\substack{d|7^\alpha\\ d>7}}SL(d)=9\cdot 7^\alpha.$$

通过讨论上式中 7 的倍数立刻推出矛盾. 所以 $n\neq 9\cdot 7^\alpha$.

当 $p\geq 11$ 时, 经简单计算可得

$$13+3\cdot\sum_{\substack{d|p^\alpha\\ d>1}}SL(d)=13+3p+3\cdot\sum_{\substack{d|p^\alpha\\ d>p}}SL(d)=9\cdot p^\alpha.$$

通过讨论上式中 p 及 p^2 的倍数立刻推出矛盾. 所以 $n\neq 9\cdot p^\alpha$.

若 $n=12\cdot p^\alpha$ 满足方程 (3-10). 则有 $p\geq 5$. 于是经计算可得

$$11+6\cdot\sum_{d|p^\alpha}SL(d)=12\cdot p^\alpha.$$

上式左边为奇数, 而右边为偶数. 所以 $n\neq 12\cdot p^\alpha$.

若 $n = 16 \cdot p^{\alpha}$ 满足方程 (3-10). 则当 $p = 3$ 时, $\alpha \geq 3$ 有

$$\sum_{d|16\cdot 3^{\alpha}} SL(d) = 117 + 5 \cdot \sum_{\substack{d|3^{\alpha} \\ d>9}} SL(d) = 16 \cdot 3^{\alpha}.$$

上式中 $5 \cdot \sum\limits_{\substack{d|3^{\alpha} \\ d>9}} SL(d)$ 与 $16 \cdot 3^{\alpha}$ 能被 27 整除, 但是 $27 \dagger 117$, 得出矛盾.

当 $p = 5$ 时, 经计算可得

$$80 + 5 \cdot \sum_{\substack{d|5^{\alpha} \\ d>5}} SL(d) = 16 \cdot 5^{\alpha}.$$

上式中 $5 \cdot \sum\limits_{\substack{d|5^{\alpha} \\ d>5}} SL(d)$ 与 $16 \cdot 5^{\alpha}$ 能被 25 整除, 但是 $25 \dagger 80$, 得出矛盾.

当 $p = 7$ 时, 经计算可得

$$41 + 5 \cdot \sum_{\substack{d|7^{\alpha} \\ d>1}} SL(d) = 16 \cdot 7^{\alpha}.$$

上式中 $5 \cdot \sum\limits_{\substack{d|7^{\alpha} \\ d>1}} SL(d)$ 与 $16 \cdot 7^{\alpha}$ 能被 7 整除, 但是 $7 \dagger 41$, 得出矛盾.

当 $p = 11$ 时, 经计算可得

$$36 + 5 \cdot \sum_{\substack{d|11^{\alpha} \\ d>1}} SL(d) = 16 \cdot 11^{\alpha}.$$

上式中 $5 \cdot \sum\limits_{\substack{d|11^{\alpha} \\ d>1}} SL(d)$ 与 $16 \cdot 11^{\alpha}$ 能被 11 整除, 但是 $11 \dagger 36$, 得出矛盾.

当 $p = 13$ 时, 经计算可得

$$34 + 5 \cdot \sum_{\substack{d|13^{\alpha} \\ d>1}} SL(d) = 16 \cdot 13^{\alpha}.$$

上式中 $5 \cdot \sum\limits_{\substack{d|13^{\alpha} \\ d>1}} SL(d)$ 与 $16 \cdot 13^{\alpha}$ 能被 13 整除, 但是 $13 \dagger 34$, 得出矛盾.

当 $p \geq 17$ 时, 经计算可得

$$31 + 5 \cdot \sum_{\substack{d|p^{\alpha} \\ d>1}} SL(d) = 31 + 5p + 5 \cdot \sum_{\substack{d|p^{\alpha} \\ d>p}} SL(d) = 16 \cdot p^{\alpha}.$$

通过讨论上式中 p 及 p^2 的倍数立刻推出矛盾.

若 $n=20\cdot p^{\alpha}$ 满足方程 (3-10). 则 $p=3$ 或 $p\geq 7$, 当 $p=3$ 时, 经过计算可得

$$23+6\cdot\sum_{d|3^{\alpha}}SL(d)=20\cdot 3^{\alpha}.$$

上式中左边为奇数, 而右边为偶数. 推出矛盾.

当 $p\geq 7$ 时, 经过计算可得

$$22+6\cdot\sum_{\substack{d|p^{\alpha}\\ d>1}}SL(d)=22+6p+6\cdot\sum_{\substack{d|p^{\alpha}\\ d>p}}SL(d)=20\cdot p^{\alpha}.$$

通过讨论上式中 p 及 p^2 的倍数立刻推出矛盾.

若 $n=24\cdot p^{\alpha}$ 满足方程 (3-10). 则 $p\geq 5$, 当 $p=5,7$ 或者 $p\geq 11$ 时, 分别计算可得

$$\sum_{d|24\cdot 5^{\alpha}}SL(d)=31+8\cdot\sum_{d|5^{\alpha}}SL(d)=24\cdot 5^{\alpha},$$
$$\sum_{d|24\cdot 7^{\alpha}}SL(d)=27+8\cdot\sum_{d|7^{\alpha}}SL(d)=24\cdot 7^{\alpha},$$
$$\sum_{d|24\cdot p^{\alpha}}SL(d)=25+8\cdot\sum_{d|p^{\alpha}}SL(d)=24\cdot p^{\alpha}.$$

无论哪种情况, 都有中间项为奇数而最右边的项为偶数. 所以 $n\neq 24\cdot p^{\alpha}$.

若 $n=25\cdot p^{\alpha}$ 满足方程 (3-10). 则当 $p=2$ 时, 有 $\alpha\geq 5$. 于是经计算可得

$$195+3\cdot\sum_{\substack{d|2^{\alpha}\\ d>16}}SL(d)=25\cdot 2^{\alpha}.$$

上式左边为奇数, 而右边为偶数矛盾. 所以 $n\neq 25\cdot 2^{\alpha}$.

当 $p=3$ 时计算可得

$$107+3\cdot\sum_{\substack{d|3^{\alpha}\\ d>25}}SL(d)=25\cdot 3^{\alpha}.$$

上式左边不是 3 的倍数, 而右边为 3 的倍数, 矛盾. 所以 $n\neq 25\cdot 3^{\alpha}$.

当 $7\leq p\leq 23$ 时经计算可得

$$56+2p+3\cdot\sum_{\substack{d|p^{\alpha}\\ d>p}}SL(d)=25\cdot p^{\alpha}.$$

通过讨论上式中 p 及 p^2 的倍数立刻推出矛盾. 所以 $n\neq 25\cdot p^{\alpha}$.

当 $p \geq 29$ 时经计算可得

$$31 + 3p + 3 \cdot \sum_{\substack{d \mid p^\alpha \\ d > p}} SL(d) = 25 \cdot p^\alpha.$$

通过讨论上式中 p 及 p^2 的倍数立刻推出矛盾. 所以此时仍然有 $n \neq 25 \cdot p^\alpha$.

若 $n = 27 \cdot p^\alpha$ 满足方程 (3-10). 则当 $p = 2$ 时, 有 $\alpha \geq 5$. 于是经计算可得

$$132 + 4 \cdot \sum_{\substack{d \mid 2^\alpha \\ d > 2}} SL(d) = 27 \cdot 2^\alpha.$$

上式中 $4 \cdot \sum\limits_{\substack{d \mid 2^\alpha \\ d > 2}} SL(d)$ 与 $27 \cdot 2^\alpha$ 能被 8 整除, 但是 $8 \dagger 132$, 得出矛盾.

当 $p = 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ 或者 $p \geq 29$ 时, 分别计算可得如下各式

$$\sum_{d \mid 27 \cdot 5^\alpha} SL(d) = 64 + 4 \cdot \sum_{d \mid 5^\alpha} SL(d) = 27 \cdot 5^\alpha,$$

$$\sum_{d \mid 27 \cdot 7^\alpha} SL(d) = 58 + 4 \cdot \sum_{d \mid 7^\alpha} SL(d) = 27 \cdot 7^\alpha,$$

$$\sum_{d \mid 27 \cdot 11^\alpha} SL(d) = 52 + 4 \cdot \sum_{d \mid 11^\alpha} SL(d) = 27 \cdot 11^\alpha,$$

$$\sum_{d \mid 27 \cdot 13^\alpha} SL(d) = 50 + 4 \cdot \sum_{d \mid 13^\alpha} SL(d) = 27 \cdot 13^\alpha,$$

$$\sum_{d \mid 27 \cdot 17^\alpha} SL(d) = 46 + 4 \cdot \sum_{d \mid 17^\alpha} SL(d) = 27 \cdot 17^\alpha,$$

$$\sum_{d \mid 27 \cdot 19^\alpha} SL(d) = 44 + 4 \cdot \sum_{d \mid 19^\alpha} SL(d) = 27 \cdot 19^\alpha,$$

$$\sum_{d \mid 27 \cdot 23^\alpha} SL(d) = 40 + 4 \cdot \sum_{d \mid 23^\alpha} SL(d) = 27 \cdot 23^\alpha,$$

$$\sum_{d \mid 27 \cdot p^\alpha} SL(d) = 36 + 4 \cdot \sum_{d \mid p^\alpha} SL(d) = 27 \cdot p^\alpha.$$

上面各式中间项都是偶数, 而最右边项都是奇数. 所以 $n \neq 27 \cdot p^\alpha$. 结合以上各种情况就完成了定理的证明.

3.4 关于 $SL(n)$ 函数的一个猜想

考察和式

$$\sum_{d \mid n} \frac{1}{SL(d)}, \tag{3-14}$$

其中 $\sum\limits_{d|n}$ 表示对 n 的所有正因子求和, 我们发现任何一个正整数 $n>1$ 且 $n\neq 36$ 都不能使 (3-14) 式成为整数. 于是我们提出以下

猜想 除 $n=1,\ 36$ 外, 没有任何其它正整数 n, 使得 (3-14) 式成为一个整数.

即使不能证明它, 我们仍然相信这个猜想是正确的. 本节的主要目的是研究这个问题, 并且证明对于一些特殊的正整数 n, 这个猜想是正确的. 即要证明下面的

定理 3.4.1 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式 (这里 $p_1<p_2<\cdots<p_r$). 如果 $\alpha_1=1$, 猜想是正确的.

证明: 对于任意正整数 $n>1$, 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为 n 的标准分解式, 那么根据 $SL(n)$ 的性质有

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_r^{\alpha_r}\}. \tag{3-15}$$

现在设 $\alpha_1=1$ 且 n 满足

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL(d)}=m \quad \text{是一个正整数.}$$

设 $n=p_1\cdot n_1$, 那么注意到对任意 $d|n_1$ 且 $d>1$, $SL(p_1\cdot d)=SL(d)$, 有

$$\begin{aligned} m &= \sum_{d|n}\frac{1}{SL(d)}=\sum_{d|n_1}\frac{1}{SL(d)}+\sum_{d|n_1}\frac{1}{SL(p_1\cdot d)}\\ &= \sum_{d|n_1}\frac{1}{SL(d)}+\sum_{d|n_1}\frac{1}{SL(d)}+\frac{1}{p_1}-1=\sum_{d|n_1}\frac{2}{SL(d)}+\frac{1}{p_1}-1, \end{aligned}$$

或者

$$n_1\cdot m=\sum_{d|n_1}\frac{n_1}{SL(d)}+\frac{n_1\cdot(1-p_1)}{p_1}. \tag{3-16}$$

显然对于任意 $d|n_1$, $\dfrac{n_1}{SL(d)}$ 和 $n_1\cdot m$ 是整数, 但是 $\dfrac{n_1\cdot(1-p_1)}{p_1}$ 不是整数, 与 (3-16) 矛盾. 于是, 如果 $\alpha_1=1$, 猜想正确.

定理 3.4.2 对任意整数 $n>1$, 如果 $SL(n)$ 是一个素数, 猜想是正确的.

证明: 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为 n 的标准分解式. 如果 $SL(n)$ 是一个素数, 则 $SL(n)=p_s$ 和 $\alpha_s=1$. 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s=n_1\cdot p_s$. 于是如果 (3-14) 是一个整数 m, 那么注意到对任意 $d|n_1$，$SL(p_s\cdot d)=p_s$, 有

$$\begin{aligned} m &= \sum_{d|n}\frac{1}{SL(d)}=\sum_{d|n_1}\frac{1}{SL(d)}+\sum_{d|n_1}\frac{1}{SL(p_s\cdot d)}\\ &= \sum_{d|n_1}\frac{1}{SL(d)}+\sum_{d|n_1}\frac{1}{p_s}=\sum_{d|n_1}\frac{1}{SL(d)}+\frac{d(n_1)}{p_s}, \end{aligned} \tag{3-17}$$

这里 $d(n_1)$ 表示 n_1 的 Dirichlet 除数函数. 显然对任意 $d|n_1$, 有 $(SL(d),p_s)=1$. 于是从 (3-17) 可得

$$p_s \mid d(n_1)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_{s-1}+1).$$

不失一般性, 假设 $p_s \mid \alpha_i+1$, $1\le i\le s-1$. 此时有 $\alpha_i+1\ge p_s$ 或 $\alpha_i\ge p_s-1$. 但是在这种情况下有 $p_i^{\alpha_i}\ge p_i^{p_s-1}\ge (1+1)^{p_s-1}>p_s$, 与 $SL(n)=p_s$ 矛盾. 于是就证明了定理 3.4.2.

定理 3.4.3 设 p 是一个素数且 α 为任意正整数. 如果 $n=p^\alpha$, 则猜想是正确的.

证明: 设 p 是一个素数且 $n=p^\alpha$. 那么有

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\frac{1}{SL(d)} &= \sum_{i=0}^{\alpha}\frac{1}{SL(p^i)}=1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^\alpha}\\ &= \frac{1+p+p^2+\cdots+p^\alpha}{p^\alpha}.\end{aligned} \tag{3-18}$$

因为 $\left(p^\alpha,1+p+p^2+\cdots p^\alpha\right)=1$, 于是 (3-18) 是一个整数是不可能的. 于是完成了定理 3.4.3 的证明.

从定理 3.4.2 可得出下列的

推论 3.4.1 如果 n 为无平方因子数 (即 $n>1$, 且对任何素数 $p|n\Longrightarrow p^2\dagger n$), 则猜想是正确的.

3.5 关于 $S(n)$ 和 $SL(n)$ 函数的一个方程

在本节中, 将利用初等方法来研究方程

$$\sum_{d|n}S(d)=\sum_{d|n}SL(d) \tag{3-19}$$

的可解性问题, 得到该方程的所有正整数解, 并给出该方程解的渐近公式. 即将要证明下面的

定理 3.5.1 方程 (3-19) 有无限多个解, 分别是 $n=1$, $2^\alpha p_1p_2\cdots p_k$, 其中 k 是任意正整数, $\alpha=0$, 1 或 2, 且 $2<p_1<\cdots<p_k$ 是各不相同的素数.

证明: 事实上, 由 $S(n)$ 和 $SL(n)$ 的定义可知 $n=1$ 是方程 (3-19) 的解. 如果 $n>1$, $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ ($p_1<p_2<\cdots<p_k$) 是 n 的标准分解式. 则由 $S(n)$ 和 $SL(n)$ 的定义及性质, 有

$$S(n)=\max\{S(p_1^{\alpha_1}),\, S(\ p_2^{\alpha_2})\ \cdots,\ S(p_k^{\alpha_k})\}=S(p_i^{\alpha_i})\le \alpha_i p_i$$

和

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_k^{\alpha_k}\}=p_j^{\alpha_j},$$

显然有 $p_j^{\alpha_j} \geq p_i^{\alpha_i} \geq \alpha_i p_i$. 因此, 对任意正整数 $n > 1$, 不妨设 $n = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $(2 < p_1 < \cdots < p_k)$, 下面将所有 $n > 1$ 分为以下三种情况来讨论

(1) 当 $\alpha = 0,\ 1$,

(a) 如果 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 1$. 也就是说, $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ 或 $n = 2p_1 p_2 \cdots p_k$, 则对 n 的任意因子 d, 有 $S(d) = SL(d)$, 此时方程 (3-19) 成立.

(b) 如果至少有一个 $\alpha_i \geq 2$, 则有 $S(p_i^{\alpha_i}) \leq \alpha_i p_i$, $SL(p_i^{\alpha_i}) = p_i^{\alpha_i}$. 显然方程 (3-19) 此时不成立.

(2) 当 $\alpha = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 1$,

(c) 如果 $p_1 = 3$, 即 $n = 4 \cdot 3 n_1$ ($12 \dagger n_1$), 则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{d|n} S(d) \\
= \ & \sum_{d|n_1} S(d) + \sum_{d|n_1} S(2d) + \sum_{d|n_1} S(4d) + \sum_{d|n_1} S(3d) + \sum_{d|n_1} S(6d) + \sum_{d|n_1} S(12d) \\
= \ & \sum_{d|n_1} S(d) + \left(2 - 1 + \sum_{d|n_1} S(d)\right) + \left(4 - 1 + \sum_{d|n_1} S(d)\right) + \\
& \left(3 - 1 + \sum_{d|n_1} S(d)\right) + \left(3 - 1 + \sum_{d|n_1} S(d)\right) + \left(4 - 1 + \sum_{d|n_1} S(d)\right) \\
= \ & 11 + 6 \sum_{d|n_1} S(d),
\end{aligned}$$

同理可得 $\sum\limits_{d|n} SL(d) = 11 + 6 \sum\limits_{d|n_1} SL(d)$, 所以有 $\sum\limits_{d|n_1} S(d) = \sum\limits_{d|n_1} SL(d)$. 方程 (3-19) 此时成立.

(d) 如果 $p_1 > 3$, 即 $n = 4 \cdot n_1$ ($4 \dagger n_1$), 有 $\sum\limits_{d|n} S(d) = 4 + 3 \sum\limits_{d|n_1} S(d)$ 和 $\sum\limits_{d|n} SL(d) = 4 + 3 \sum\limits_{d|n_1} SL(d)$, 此时方程 (3-19) 成立.

(3) 当 $\alpha \geq 3$ 时, 则在方程 (3-19) 两边存在对应项满足 $S(2^{\alpha}) \leq 2\alpha$, $SL(2^{\alpha}) = 2^{\alpha} > 2\alpha$, 此时方程 (3-19) 不成立.

综上所述, 方程 (3-19) 有无限个解：$n = 1$, $2^{\alpha} p_1 p_2 \cdots p_k$ ($\alpha = 0,1$ 或者 2), 其中 $2 < p_1 < \cdots < p_k$ 是各不相同的素数. 这就完成了定理的证明.

令 A 表示方程 (3-19) 的所有正整数解的集合, 则有

定理 3.5.2 对任意复数 s ($Re(s) > 1$), 则有

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} \frac{4^s + 2^s + 1}{4^s + 2^s},$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann zeta- 函数.

证明: 由 Euler 乘积公式 (参阅文献 [4] 定理 11.7) 及 Möbius 函数的性质, 有

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in A}\frac{1}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^s}+\frac{1}{4^s}\sum_{\substack{n=1\\ 2\dagger n}}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}\right)+\frac{1}{4^s}\frac{\prod\limits_p\left(1+\frac{1}{p^s}\right)}{1+\frac{1}{2^s}}\\
&= \left(1+\frac{1}{4^s+2^s}\right)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}\right)=\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\frac{4^s+2^s+1}{4^s+2^s}.
\end{aligned}
$$

这就完成了定理的证明.

定理 3.5.3 对任意实数 $x\geq 1$, 有渐近公式

$$
\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in A}}1=\frac{7}{\pi^2}x+O(\sqrt{x}).
$$

证明: 由 Möbius 函数 $\mu(n)$ 的性质有

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in A}}1 &= \sum_{n\leq x}|\mu(n)|+\sum_{\substack{n\leq \frac{x}{4}\\ 2\dagger n}}|\mu(n)|=\sum_{n\leq x}\sum_{d^2|n}\mu(d)+\sum_{\substack{n\leq \frac{x}{4}\\ 2\dagger n}}\sum_{d^2|n}\mu(d)\\
&= \sum_{d^2l\leq x}\mu(d)+\sum_{\substack{d^2l\leq \frac{x}{4}\\ 2\dagger d^2l}}\mu(d)=\sum_{d^2\leq x}\sum_{1\leq l\leq \frac{x}{d^2}}\mu(d)+\sum_{\substack{d^2\leq \frac{x}{4}\\ 2\dagger d}}\sum_{\substack{1\leq l\leq \frac{x}{4d^2}\\ 2\dagger l}}\mu(d)\\
&= \sum_{d^2\leq x}\mu(d)\sum_{1\leq l\leq \frac{x}{d^2}}1+\sum_{\substack{d^2\leq \frac{x}{4}\\ 2\dagger d}}\mu(d)\sum_{\substack{1\leq l\leq \frac{x}{4d^2}\\ 2\dagger l}}1\\
&= \sum_{d^2\leq x}\mu(d)\left(\frac{x}{d^2}+O(1)\right)+\sum_{\substack{d^2\leq \frac{x}{4}\\ 2\dagger d}}\mu(d)\left(\frac{x}{8d^2}+O(1)\right)\\
&= x\sum_{d^2\leq x}\frac{\mu(d)}{d^2}+O(\sum_{d^2\leq x}|\mu(d)|)+x\sum_{\substack{d^2\leq \frac{x}{4}\\ 2\dagger d}}\frac{\mu(d)}{8d^2}+O(\sum_{\substack{d^2\leq \frac{x}{4}\\ 2\dagger d}}|\mu(d)|)\\
&= x\sum_{d\leq\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2}+\frac{x}{8}\sum_{\substack{d\leq \frac{\sqrt{x}}{2}\\ 2\dagger d}}\frac{\mu(d)}{d^2}+O(\sqrt{x}),
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n^2}=\frac{6}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{x}\right)\quad 和 \quad \sum_{\substack{n\leq \frac{\sqrt{x}}{2}\\ 2\dagger n}}\frac{\mu(n)}{n^2}=\frac{8}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),
$$

则有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} 1 = x\left(\frac{6}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)+\frac{x}{8}\left(\frac{8}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)+O(\sqrt{x})=\frac{7}{\pi^2}x+O(\sqrt{x}).$$

这就完成了定理的证明.

注意到

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\quad \zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450},$$

由定理 3.5.2 可得到下面的

推论 3.5.1 在定理 3.5.2 中取 $s=2,\ 4$, 则有如下等式

$$\sum_{n\in A}\frac{1}{n^2}=\frac{63}{4\pi^2} \quad 和 \quad \sum_{n\in A}\frac{1}{n^4}=\frac{28665}{272\pi^4}.$$

3.6 一个关于 SL(n) 函数的渐近公式

本节的主要目的是运用初等方法进一步研究 $SL(n)$ 函数在特殊数列上的渐近性质, 并得到一个较强的渐近公式.

为了证明本节的定理, 我们首先证明

引理 3.6.1 对任意正整数 $n>1$，当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式时, 有恒等式

$$SL(n)=\max_{1\le i\le k}\{p_i^{\alpha_i}\}. \tag{3-20}$$

证明: 参阅文献 [7].

引理 3.6.2 对于任意给定的素数 p 及正整数 $n\ge 1$, 如果 n 的 p 进制表示式为 $n=a_1p^{\alpha_1}+a_2p^{\alpha_2}+\cdots+a_sp^{\alpha_s}$ 且 $\alpha_s>\alpha_{s-1}>\cdots>\alpha_1\ge 0$, 其中 $1\le a_i\le p-1$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$, 假设 $a(n,p)=\sum\limits_{i=1}^{s}a_i$ 时有恒等式

$$\alpha_p(n)=\alpha(n)=\sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]=\frac{1}{p-1}(n-a(n,p)),$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大正整数.

证明: 由 $[x]$ 的性质可知

$$\left[\frac{n}{p^i}\right] = \left[\frac{a_1p^{\alpha_1}+a_2p^{\alpha_2}+\cdots+a_sp^{\alpha_s}}{p^i}\right]$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=k}^{s} a_j p^{\alpha_j - i}, & \text{如果} \quad \alpha_{k-1} < i \le \alpha_k \\ 0, & \text{如果} \quad i \ge \alpha_s. \end{cases}$$

由此有

$$\begin{aligned} \alpha(n) &\equiv \sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] = \sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{a_1p^{\alpha_1} + a_2p^{\alpha_2} + \cdots + a_sp^{\alpha_s}}{p^i}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{\alpha_j} a_j p^{\alpha_j - k} = \sum_{j=1}^{s} a_j(1 + p + p^2 + \cdots + p^{\alpha_j - 1}) \\ &= \sum_{j=1}^{s} a_j \cdot \frac{p^{\alpha_j} - 1}{p - 1} = \frac{1}{p-1}\sum_{j=1}^{s}(a_jp^{\alpha_j} - a_j) \\ &= \frac{1}{p-1}(n - a(n,p)). \end{aligned}$$

引理 3.6.2 得证.

定理 3.6.1 对任意正整数 n, 有渐近公式

$$SL(n!) = \left[2 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right]^n.$$

证明: 设 $n! = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ 为 $n!$ 的标准素因子分解式. 由引理 3.6.1, 有

$$SL(n!) = \max_{1\le i\le k}\{p_i^{\alpha_i}\} = p^{\alpha}.$$

此外, 对于任意给定的素数 p 及正整数 n, 如果 $n = a_1p^{\alpha_1} + a_2p^{\alpha_2} + \cdots + a_sp^{\alpha_s}$ 且 $\alpha_s > \alpha_{s-1} > \cdots > \alpha_1 \ge 0$, 其中 $1 \le a_i \le p-1$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ s)$, 则有 $a(n,p) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$. 由引理 3.6.2 及文献 [8], 有

$$\alpha_p(n) \equiv \alpha(n) \equiv \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] = \frac{1}{p-1}(n - a(n,p)). \tag{3-21}$$

由于 (3-21) 式右边实际上是一个有限和, 因为必有整数 k 满足 $p^k \le n < p^{k+1}$, 这样等式 (3-21) 就成为

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] = \sum_{i=1}^{s}\left[\frac{n}{p^i}\right],$$

又由 (3-20) 式及 (3-21) 式可知

$$SL(n!) = p^{\alpha} = p^{\frac{n-a(n,p)}{p-1}} = e^{\frac{n-a(n,p)}{p-1}\ln p}.$$

由文献 [9] 得

$$\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{n}{p^i}\right] < \sum_{i=1}^{s}\frac{n}{p^i} = \frac{n}{p-1},$$

再由文献 [8] 有

$$\alpha(n) = \frac{1}{p-1}(n - a(n,p)),$$

并且

$$a(n,p) \le \frac{p}{\ln p}\ln n,$$

所以 $\dfrac{a(n,p)}{p-1} = O(\dfrac{\ln n}{\ln p})$. 又由引理 3.6.2 得

$$\alpha(n,p) = \alpha(p) = \sum_{i=1}^{s}\left[\frac{n}{p^i}\right] = \frac{n}{p-1} + O\left(\frac{\ln n}{\ln p}\right),$$

另外, 对每一个 α_i 均有

$$\alpha_i = \alpha(p_i) = \frac{n}{p_i - 1} + O\left(\frac{\ln n}{\ln p_i}\right),$$

$$p_i^{\alpha_i} = p_i^{\frac{n}{p_i-1} + O\left(\frac{\ln n}{\ln p_i}\right)},$$

即

$$p_i^{\alpha_i} = e^{\frac{n\ln p_i}{p_i-1} + O(\ln n)}.$$

注意到, 当 $p_i < p_j$ 时有

$$\frac{\ln p_i}{p_i - 1} < \frac{\ln p_j}{p_j - 1}.$$

显然在上式中, 当 $p_i = 2$ 时, $2^{\alpha(2)} = 2^{n+O(\frac{\ln n}{\ln 2})}$ 最大. 注意到当 x 很小时有 $2^x = 1 + O(x)$. 于是由 (3-20) 式及上述证明可得

$$\begin{aligned} SL(n!) &= \max_{2\le p\le n} p^{\alpha(p)} \\ &= 2^{\alpha(2)} = 2^{\frac{n}{2-1} + O\left(\frac{\ln n}{\ln 2}\right)} \\ &= 2^{n+O(\ln n)} \\ &= \left[2\cdot 2^{O\left(\frac{\ln n}{n}\right)}\right]^n \\ &= \left[2 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right]^n. \end{aligned}$$

于是完成了定理的证明.

我们对定理 3.6.1 的渐近式两边求极限就可得到

推论 3.6.1 当 $n\to\infty$ 时, 有极限式

$$\lim_{n\to\infty}[SL(n!)]^{\frac{1}{n}}=2 \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(SL(n!))}{n}=\ln 2.$$

3.7 $SL(n)$ 函数值的分布

本节的主要目的是用初等的方法来研究函数 $SL(n)$ 的值分布问题, 并给出一个渐近公式. 即我们将证明

定理 3.7.1 对任意实数 $x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}(SL(n)-P(n))^2=\frac{2}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 是Riemann zeta- 函数, $P(n)$ 表示 n 的最大素因子.

证明: 事实上, 对任意正整数 $n>1$, $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 表示 n 的标准分解式, 由文献 [7] 可知

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_s^{\alpha_s}\}. \tag{3-22}$$

现在考虑和式

$$\sum_{n\le x}(SL(n)-P(n))^2. \tag{3-23}$$

将所有 $n\in[1,\ x]$ 分为 A, B, C 和 D 四个集合:

A: $P(n)\ge\sqrt{n}$, $n=m\cdot P(n)$, $m<P(n)$;

B: $n^{\frac{1}{3}}<P(n)\le\sqrt{n}$, $n=m\cdot P^2(n)$, $m<n^{\frac{1}{3}}$;

C: $n^{\frac{1}{3}}<p_1<P(n)\le\sqrt{n}$, $n=m\cdot p_1\cdot P(n)$, 其中 p_1 是素数;

D: $P(n)\le n^{\frac{1}{3}}$.

很显然, 当 $n\in A$ 时, 则有 $SL(n)=P(n)$. 因此

$$\sum_{n\in A}(SL(n)-P(n))^2=\sum_{n\in A}(P(n)-P(n))^2=0. \tag{3-24}$$

同样地, 当 $n\in C$ 时, 也有 $SL(n)=P(n)$. 所以有

$$\sum_{n\in C}(SL(n)-P(n))^2=\sum_{n\in C}(P(n)-P(n))^2=0. \tag{3-25}$$

现在来估计集合 B 中的主项. 根据 Abel 求和公式和素数定理可得

$$\sum_{n\in B}(SL(n)-P(n))^2=\sum_{\substack{mp^2\le x\\ m<p}}\left(SL(mp^2)-P(mp^2)\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}} \sum_{m<p\le\sqrt{\frac{x}{m}}} \left(p^2-p\right)^2 \\
&= \sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}} \left[\left(\frac{x}{m}\right)^2\cdot\pi\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right) - 4\int_m^{\sqrt{\frac{x}{m}}} y^3\pi(y)dx + O\left(m^5+\frac{x^2}{m^2}\right)\right] \\
&= \sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5m^{\frac{5}{2}}\ln\sqrt{\frac{x}{m}}} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{m^{\frac{5}{2}}\ln^2\frac{x}{m}}\right)\right) \\
&= \frac{2}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right),
\end{aligned}
\tag{3-26}
$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann zeta- 函数.

最后, 来估计集合 D 中的主项. 对任意整数 $n\in D$, 有 $SL(n)=p^{\alpha}$. 若 $\alpha=1$, 则 $SL(n)=p=P(n)$, 所以 $SL(n)-P(n)=0$. 因此只需要考虑 $\alpha\ge 2$ 的情形. 此时注意到 $P(n)\le n^{\frac{1}{3}}$, 则有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\in D}(SL(n)-P(n))^2 \ll \sum_{n\in D}\left(SL^2(n)+P^2(n)\right) \\
\ll& \sum_{\substack{mp^{\alpha}\le x\\ \alpha\ge 2,\ p<x^{\frac{1}{3}}}} p^{2\alpha} + \sum_{n\le x} n^{\frac{2}{3}} \ll \sum_{\substack{p^{\alpha}\le x\\ \alpha\ge 2,\ p\le x^{\frac{1}{3}}}} p^{2\alpha}\sum_{m\le\frac{x}{p^{\alpha}}} 1 + x^{\frac{5}{3}} \\
\ll& x\cdot\sum_{\substack{p^{\alpha}\le x\\ \alpha\ge 2,\ p\le x^{\frac{1}{3}}}} p^{\alpha} + x^{\frac{5}{3}} \ll x^2.
\end{aligned}
\tag{3-27}
$$

结合 (3-24), (3-25), (3-26) 和 (3-27) 可得渐近公式

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\le x}(SL(n)-P(n))^2 &= \sum_{n\in A}(SL(n)-P(n))^2 + \sum_{n\in B}(SL(n)-P(n))^2 \\
&\quad + \sum_{n\in C}(SL(n)-P(n))^2 + \sum_{n\in D}(SL(n)-P(n))^2 \\
&= \frac{2}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right).
\end{aligned}
$$

这就完成了定理的证明.

3.8 一个包含新的 Smarandache 函数的方程

$\overline{SL}(n)$ 是一个新定义的 Smarandache 函数, 通过研究发现 $\overline{SL}(n)$ 与函数 $SL(n)$ 有许多类似的性质. 例如当 n 为素数的方幂时, $\overline{SL}(n)=SL(n)$. 对

于 $\overline{SL}(n)$ 函数显然存在无限多个正整数 n 使得 $\sum_{d|n}\overline{SL}(d)>n$. 事实上, 当 $n=p^{\alpha}$ 为素数方幂时, 我们有

$$\sum_{d|n}\overline{SL}(d)=\sum_{d|p^{\alpha}}\overline{SL}(d)=1+p+\cdots+p^{\alpha}>p^{\alpha}=n.$$

同时又存在无限多个正整数 n, 使得 $\sum_{d|n}\overline{SL}(d)<n$. 例如当 n 为两个不同奇素数的乘积时, 即 $n=p\cdot q$, 其中 $3\le p<q$ 为素数, 那么

$$\sum_{d|n}\overline{SL}(d)=\sum_{d|p\cdot q}\overline{SL}(d)=1+2p+q<p\cdot q=n.$$

于是我们考虑, 哪些自然数 n, 能使方程 $\sum_{d|n}\overline{SL}(d)=n$ 成立? 本节的主要目的是寻求所有使得方程

$$\sum_{d|n}\overline{SL}(d)=n \tag{3-28}$$

成立的正整数 n , 其中 $\sum_{d|n}$ 表示对 n 的所有正因数求和.

为了完成定理的证明. 首先引入

引理 3.8.1 当 $m\ge 13$ 时, $m\ge 3d(m)$, 这里 $d(m)$ 为除数函数.

证明: 设 $m\ge 13$ 且 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 m 的标准分解式. 我们分以下几种情况来进行讨论

i) 如果有一个 $\alpha_i\ge 4$ $(1\le i\le k)$, 则有

$$\frac{m}{d(m)}=\prod_{i=1}^{k}\frac{{p_i}^{\alpha_i}}{\alpha_i+1}\ge\frac{2^4}{4+1}>3,$$

即 $m\ge 3d(m)$.

ii) 如果 $\max\limits_{1\le i\le k}\{\alpha_i\}=\alpha_j=3$, 则当 $p_j\ge 3$ 时有

$$\frac{m}{d(m)}=\prod_{i=1}^{k}\frac{{p_i}^{\alpha_i}}{\alpha_i+1}\ge\frac{3^3}{3+1}>3,$$

而当 $p_j=2$ 时, m 至少有两个不同的素因子, 于是有

$$\frac{m}{d(m)}=\prod_{i=1}^{k}\frac{{p_i}^{\alpha_i}}{\alpha_i+1}\ge\frac{2^3}{3+1}\cdot\frac{3}{1+1}=3,$$

即 $m \geq 3d(m)$.

iii) 如果 $\max\limits_{1\leq i\leq k}\{\alpha_i\} = \alpha_j = 2\ (i = 1,\ 2, \cdots, k)$,

若 $p_j \geq 3$, 则 $\dfrac{m}{d(m)} = \prod\limits_{i=1}^{k} \dfrac{{p_i}^{\alpha_i}}{\alpha_i + 1} \geq \dfrac{3^2}{2+1} = 3$,

若 $p_j = 2$, 由于 $n\ (\geq 13)$ 至少还有另一个素因子 $q \geq 5$, 则

$$\frac{m}{d(m)} = \prod_{i=1}^{k} \frac{{p_i}^{\alpha_i}}{\alpha_i + 1} \geq \frac{2^2}{2+1} \cdot \frac{5}{1+1} > 3,$$

即都有 $m \geq 3d(m)$.

iv) 如果 $\alpha_i = 1\ (i = 1,\ 2, \cdots, k)$,

若 $k = 1$, 则 $p \geq 13$, $\dfrac{m}{d(m)} \geq \dfrac{13}{1+1} > 3$;

若 $k = 2$, 我们分下面三种情况讨论

当 m 含有素因子 2 时必有另一个素因子 $q \geq 7$, 此时 $\dfrac{m}{d(m)} \geq \dfrac{2}{1+1} \cdot \dfrac{7}{1+1} > 3$;

当 m 含有素因子 3 时必有另一个素因子 $q \geq 5$, 此时 $\dfrac{m}{d(m)} \geq \dfrac{3}{1+1} \cdot \dfrac{5}{1+1} > 3$;

当 m 含有两个 ≥ 5 的不同素因子, 此时 $\dfrac{m}{d(m)} \geq \dfrac{5}{1+1} \cdot \dfrac{7}{1+1} > 3$;

若 $k \geq 3$, 我们有 $\dfrac{m}{d(m)} \geq \dfrac{2}{1+1} \cdot \dfrac{3}{1+1} \cdot \dfrac{5}{1+1} > 3$, 即对任何情形都有 $m \geq 3d(m)$.

结合以上情况就完成了引理的证明.

定理 3.8.1 *方程* $\sum\limits_{d|n} \overline{SL}(d) = n$ *有且仅有两个正整数解* $n = 1,\ 10$.

证明: 容易验证 $n = 1$ 是方程的解. 设 $n > 1$ 且 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解式, 因为 $n = p^\alpha$ 不满足方程, 所以当 n 满足方程时有 $k \geq 2$. 现在设

$$\overline{SL}(n) = \min\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_k^{\alpha_k}\} = p^\alpha.$$

为方便起见设 $n = mp^\alpha$ 满足方程, 此时应有

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} \overline{SL}(d) &= \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{d|m} \overline{SL}(dp^i) \\ &= \sum_{d|m} \overline{SL}(d) + \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{d|m} \overline{SL}(dp^i) = mp^\alpha.\end{aligned}$$

因为当 $d|m$ 时, $\overline{SL}(dp^i) \leq p^i$, 所以

$$mp^\alpha \leq \sum_{d|m} \overline{SL}(d) + \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{d|m} p^i = \sum_{d|m} \overline{SL}(d) + d(m) \cdot \sum_{i=1}^{\alpha} p^i$$

$$= \sum_{d|m}\overline{SL}(d)+\frac{p(p^\alpha-1)}{p-1}d(m).$$

上式两边同除以 p^α, 并注意到当 $d|m$ 时 $\overline{SL}(d)\le p^\alpha$, 所以有

$$m\le\sum_{d|m}\frac{\overline{SL}(d)}{p^\alpha}+\frac{p(p^\alpha-1)}{(p-1)p^\alpha}\cdot d(m)<d(m)+\frac{p}{p-1}\cdot d(m)\le 3d(m).$$

即若 $n=mp^\alpha$ 满足方程, 应有 $m<3d(m)$, 也就是当 $m\ge 3d(m)$ 时, $n=mp^\alpha$ 不是方程的解, 由引理可知此时 $m\ge 13$. 下面只需讨论当 $m<13$ 时, 哪些 $n=mp^\alpha$ 满足方程即可.

1) 当 $m=7,9,11$ 时, 容易验证 $m\ge 3d(m)$, 此时 $n=mp^\alpha$ 不是方程的解.

2) 当 $m=2$ 时, $n=2p^\alpha$, 此时 $p\ge 3$.

$$\begin{aligned}\sum_{d|2p^\alpha}\overline{SL}(d) &= \sum_{d|p^\alpha}\overline{SL}(d)+\sum_{d|p^\alpha}\overline{SL}(2d)=\sum_{d|p^\alpha}\overline{SL}(d)+2(\alpha+1)\\ &= 1+p+p^2+\cdots+p^\alpha+2(\alpha+1).\end{aligned}$$

若 $\alpha=1$, 解 $1+p+2(1+1)=2p$ 得 $p=5$, 此时 $n=2p=10$ 显然是方程的解.

若 $\alpha=2$, 假如 $p=3$, 则 $\sum\limits_{d|2\cdot 3^2}\overline{SL}(d)=1+3+3^2+2(2+1)=19>2\cdot 3^2$, 即 $\sum\limits_{d|2\cdot 3^2}\overline{SL}(d)>n$.

假如 $p\ge 5$, 则 $\sum\limits_{d|2p^2}\overline{SL}(d)=1+p+p^2+2(2+1)=7+p+p^2<2p^2$, 即 $\sum\limits_{d|2p^2}\overline{SL}(d)<n$.

若 $\alpha\ge 3$, 对正整数 $\alpha(\ge 3)$ 用数学归纳法易证不等式

$$1+p+p^2+\cdots+p^\alpha+2(\alpha+1)<2p^\alpha$$

成立, 即 $\sum\limits_{d|2p^\alpha}\overline{SL}(d)<n$.

3) 当 $m=3$ 时, $n=3p^\alpha$, 此时 $p=2,\alpha\ge 2$ 或 $p\ge 5$,

若 $p=2$, 则有

$$\sum_{d|3\cdot 2^\alpha}\overline{SL}(d)=\sum_{d|2^\alpha}\overline{SL}(d)+\sum_{d|2^\alpha}\overline{SL}(3d)=2^{\alpha+1}+3\alpha+1.$$

假如 $\alpha=2,3$, 则 $\sum\limits_{d|3\cdot 2^\alpha}\overline{SL}(d)>n$; 假如 $\alpha\ge 4$, 则 $2^{\alpha+1}+3\alpha+1<3\cdot 2^\alpha$, 即 $\sum\limits_{d|3\cdot 2^\alpha}\overline{SL}(d)<n$.

若 $p \geq 5$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{d|3p^\alpha} \overline{SL}(d) &= \sum_{d|p^\alpha} \overline{SL}(d) + \sum_{d|p^\alpha} \overline{SL}(3d) \\ &= 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha + 3(\alpha+1) < 3p^\alpha,\end{aligned}$$

即 $\sum_{d|3p^\alpha} \overline{SL}(d) < n$.

4) 当 $m = 4$ 时, $n = 4p^\alpha$, 则 $p \geq 3$,

若 $p = 3$, 则 $\sum_{d|4\cdot 3^\alpha} \overline{SL}(d) = 3+3^2+\cdots+3^\alpha+6(\alpha+1) < 4\cdot 3^\alpha$, 即 $\sum_{d|4\cdot 3^\alpha} \overline{SL}(d) < n$.

若 $p \geq 5$, 则 $\sum_{d|4\cdot p^\alpha} \overline{SL}(d) = 1+p+p^2+\cdots+p^\alpha+6(\alpha+1) < 4p^\alpha$, 即 $\sum_{d|4p^\alpha} \overline{SL}(d) < n$.

5) 当 $m = 5$ 时, $n = 5p^\alpha$,

若 $p = 2$, $\alpha \geq 3$, 则 $\sum_{d|5\cdot 2^\alpha} \overline{SL}(d) = 2^{\alpha+1} + 5\alpha \neq 5 \cdot 2^\alpha = n$.

若 $p = 3$, $\alpha \geq 2$, 则 $\sum_{d|5\cdot 3^\alpha} \overline{SL}(d) = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^\alpha + 5\alpha + 3 < 5 \cdot 3^\alpha = n$.

若 $p > 5$ 时, 则 $\sum_{d|5\cdot p^\alpha} \overline{SL}(d) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha + 5(\alpha+1) < 5p^\alpha = n$.

6) 当 $m = 6$ 时, 则 $p \geq 5$, 此时有

$$\sum_{d|6p^\alpha} \overline{SL}(d) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha + 7(\alpha+1) < 6p^\alpha = n.$$

7) 当 $m = 8$ 时,

若 $p = 3$, 则 $\alpha \geq 2$, $\sum_{d|8\cdot 3^\alpha} \overline{SL}(d) = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^\alpha + 14\alpha + 8 < 8 \cdot 3^\alpha = n$.

若 $p = 5$, 则 $\alpha \geq 2$, $\sum_{d|8\cdot 5^\alpha} \overline{SL}(d) = 1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^\alpha + 14\alpha + 11 < 8 \cdot 5^\alpha = n$.

若 $p = 7$, 则 $\alpha \geq 2$, $\sum_{d|8\cdot 7^\alpha} \overline{SL}(d) = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^\alpha + 14\alpha + 13 < 8 \cdot 7^\alpha = n$.

若 $p > 7$, 则 $\sum_{d|8p^\alpha} \overline{SL}(d) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha + 14(\alpha+1) < 8p^\alpha = n$.

8) 当 $m = 10$ 时,

若 $p = 3$, 则 $\alpha \geq 2$, $\sum_{d|10\cdot 3^\alpha} \overline{SL}(d) = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^\alpha + 9\alpha + 7 < 10 \cdot 3^\alpha = n$.

若 $p > 5$, 则 $\sum_{d|10p^\alpha} \overline{SL}(d) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha + 9(\alpha+1) < 10p^\alpha = n$.

9) 当 $m = 12$ 时, 则 $p \geq 5$,

$\sum_{d|12p^\alpha} \overline{SL}(d) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha + 14(\alpha+1) < 12p^\alpha = n$.

综上所述, 只有 $n=1,\ 10$ 是方程的解. 这就完成了定理的证明.

3.9 一个新的 F.Smarandache 函数的值分布

本节我们给出 $\overline{SL}(n)$ 函数的一个较强的均值定理. 具体地说也就是证明下面的

定理 3.9.1 对任意实数 $x>1$ 及给定的正整数 k, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\overline{SL}(n)=x^2\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $a_1=\dfrac{1}{2}$, $a_i\ (i=2,\ 3,\cdots,\ k)$ 为可计算的常数.

证明: 对任意实数 $x>1$, 设 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数个数, 即 $\pi(x)=\sum\limits_{p\le x}1$. 则由文献 [10] 知对任意给定的正整数 k, 有

$$\pi(x)=x\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right), \tag{3-29}$$

其中 $c_1=1$, $c_i\ (i=2,\ 3,\cdots,\ k)$ 为可计算的常数.

现在将区间 $[1,x]$ 中的所有正整数 n 分为三类: $n=1$; 所有素数集合 A; 所有合数集合 B. 当 n 为合数时, 显然要么 $n=p^\alpha$, $\alpha\ge 2$; 要么 $\overline{SL}(n)\le\sqrt{n}$. 事实上因为当合数 n 不是素数的方幂时, n 至少含有两个不同的素因子, 由 $\overline{SL}(n)$ 的定义立刻得到

$$\overline{SL}(n)=\min\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_s^{\alpha_s}\}\le\sqrt{n}.$$

由此并注意到 (3-29) 式, 分部积分法及 Abel 恒等式, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x}\overline{SL}(n) &= 1+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\overline{SL}(n)+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\overline{SL}(n)=1+\sum_{p\le x}p+O\left(\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\sqrt{n}\right)\\
&= x\cdot\pi(x)-\int_{\frac{3}{2}}^{x}\pi(y)dy+O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\\
&= x^2\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{1}{\ln^{k+1}x}\right)\right)\\
&\quad -\int_{\frac{3}{2}}^{x}\left[y\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i y}+O\left(\frac{y}{\ln^{k+1}y}\right)\right]dy\\
&= x^2\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),
\end{aligned}$$

其中 $a_1=\dfrac{1}{2}$, a_i $(i=2,\ 3,\cdots,\ k)$ 为可计算的常数. 于是完成了定理的证明.

定理 3.9.2 对任意实数 $x>1$ 及给定的正整数 k, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\left(\overline{SL}(n)-p(n)\right)^2=x^{\frac{5}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $p(n)$ 表示 n 的最小素因子, $b_1=\dfrac{2}{5}$, b_i $(i=2,\ 3,\cdots,\ k)$ 为可计算的常数.

证明: 将区间 $[1,x]$ 中的所有正整数 n 分为四类: $n=1$; 所有满足 $\omega(n)=1$ 的正整数集合 C; 所有满足 $\omega(n)=2$ 的正整数集合 D; 所有满足 $\omega(n)\ge 3$ 的正整数集合 E, 其中 $\omega(n)$ 表示 n 的所有不同素因数的个数, 不包括重数. 即当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为 n 的标准分解式时, $\omega(n)=s$. 令 $p(n)$ 表示 n 的最小素因子. 于是注意到 $p(1)=0$ 及 $\overline{SL}(1)=1$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\left(\overline{SL}(n)-p(n)\right)^2 &= 1+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in C}}\left(\overline{SL}(n)-p(n)\right)^2+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in D}}\left(\overline{SL}(n)-p(n)\right)^2\\ &\quad+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in E}}\left(\overline{SL}(n)-p(n)\right)^2.\end{aligned}$$

显然, 当 $n\in C$ 时有 $n=p^{\alpha}$，此时由 $\overline{SL}(n)$ 的定义知

$$\overline{SL}(p^{\alpha})=p^{\alpha}p(n)=p\overline{SL}(p)-p(p)=0.$$

于是应用 (3-29) 式及 Abel 恒等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\le x\\ n\in C}}\left(\overline{SL}(n)-p(n)\right)^2&=\sum_{p^{\alpha}\le x}\left(p^{\alpha}-p\right)^2=\sum_{\substack{p^{\alpha}\le x\\ \alpha\ge 2}}\left(p^{\alpha}-p\right)^2\\
&=\sum_{p\le\sqrt{x}}\left(p^4-2p^3+p^2\right)+O\left(\sum_{3\le\alpha\le\ln x}\sum_{p\le x^{\frac{1}{\alpha}}}p^{2\alpha}\right)\\
&=x^2\cdot\pi(\sqrt{x})-\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{x}}4y^3\cdot\pi(y)dy+O\left(x^{\frac{7}{3}}\right)\\
&=x^{\frac{5}{2}}\cdot\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i\sqrt{x}}+O\left(\frac{1}{\ln^{k+1}\sqrt{x}}\right)\right]\\
&\quad-\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{x}}4y^3\cdot\left[y\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i y}+O\left(\frac{y}{\ln^{k+1}y}\right)\right]dy\\
&=x^{\frac{5}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),\end{aligned}\tag{3-30}$$

其中 $b_1=\dfrac{2}{5}$, $b_i\ (i=2,\ 3,\cdots,\ k)$ 为可计算的常数.

当 $n\in E$ 时, $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 至少有三个不同的素因子, 所以

$$\overline{SL}(n)\le\left[\overline{SL}\left(p_1^{\alpha_1}\right)\overline{SL}\left(p_2^{\alpha_2}\right)\cdots\overline{SL}\left(p_s^{\alpha_s}\right)\right]^{\frac{1}{\omega(n)}}=n^{\frac{1}{\omega(n)}}\le n^{\frac{1}{3}}. \tag{3-31}$$

利用估计式 (3-31) 我们立刻得到平凡估计

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in E}}\left(\overline{SL}(n)-p(n)\right)^2\ll\sum_{n\le x}n^{\frac{2}{3}}\ll x^{\frac{5}{3}}. \tag{3-32}$$

当 $n\in D$ 时, n 恰好有两个不同的素因子, 可设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ 且 $p_1<p_2$. 此时容易推出估计式 $\overline{SL}(n)\le\sqrt{n}$. 进一步若 $\alpha_1=1$, 则 $\overline{SL}(n)=p_1=p(n)$, 从而 $\left(\overline{SL}(n)-p(n)\right)^2=0$. 于是有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\le x\\ n\in D}}\left(\overline{SL}(n)-p(n)\right)^2&=\sum_{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\le x}\left[\overline{SL}\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\right)-p_1\right]^2\\ &\ll\sum_{\substack{p_1^{\alpha_1}\le\sqrt{x}\\ \alpha_1\ge 2}}\sum_{p_2^{\alpha_2}\le\frac{x}{p_1^{\alpha_1}}}p_1^{2\alpha_1}+\sum_{p_2\le\sqrt{x}}\sum_{\substack{p_1^{\alpha_1}\le\frac{x}{p_2}\\ \alpha_1\ge 2}}p_2^2\ll x^{\frac{7}{4}}.\end{aligned} \tag{3-33}$$

结合 (3-30), (3-32) 及 (3-33) 式我们立刻得到渐近公式

$$\sum_{n\le x}\left(\overline{SL}(n)-p(n)\right)^2=x^{\frac{5}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $p(n)$ 表示 n 的最小素因子, $b_1=\dfrac{2}{5}$, $b_i\ (i=2,\ 3,\cdots,\ k)$ 为可计算的常数. 于是完成了定理的证明.

3.10 一个新的数论函数及其函数值分布

对任意正整数 n, Smarandache 可乘函数 $U(n)$ 定义为 $U(1)=1$, 当 $n>1$ 时, $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是 n 的标准分解式, 则

$$U(n)=\max\{\alpha_1\cdot p_1,\ \alpha_2\cdot p_2,\ \cdots,\ \alpha_s\cdot p_s\}.$$

现在我们定义一个新的数论函数.

定义 3.10.1 函数 $V(n)$ 定义如下: $V(1)=1$, 当 $n>1$ 时, 若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是 n 的标准分解式, 则

$$V(n)=\min\{\alpha_1\cdot p_1,\ \alpha_2\cdot p_2,\ \cdots,\ \alpha_s\cdot p_s\}.$$

容易知道 $V(n)$ 的前几项值是 $V(1)=1$, $V(2)=2$, $V(3)=3$, $V(4)=4$, $V(5)=5$, $V(6)=3$, $V(7)=7$, $V(8)=6$, $V(9)=6$, $V(10)=2$, $V(11)=11$, $V(12)=3$, $V(13)=13$, $V(14)=2$, $V(15)=3$, $\cdots$. 关于函数 $V(n)$ 的初等性质, 目前还很少有人研究. 很显然 $V(n)$ 是函数 $U(n)$ 的对偶函数, 于是 $V(n)$ 和 $U(n)$ 有很多类似性质. 在本节中, 我们主要用初等方法来研究函数 $V(n)$ 的值的分布, 并给出两个较强的渐近公式. 也就是我们要证明下面的

定理 3.10.1 对任意实数 $x>1$ 和给定的正整数 k, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\left(V(n)-p(n)\right)^2=x^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $p(n)$ 表示 n 的最小素因子, c_i $(i=1,\ 2,\cdots,k)$ 是常数, $c_1=\dfrac{2}{3}$.

证明: 事实上, 对给定的正整数 k 和任意正整数 $n>1$, $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 表示 n 的标准分解式, 我们把所有的正整数 $n\in[1,\ x]$ 分为如下两个集合 A 和 B

A: $\omega(n)=1$. 即 A 是所有 $p^\alpha\le x$ 的集合, 其中 p 是素数, α 是任意正整数.

B: $\omega(n)\ge 2$, 其中 $\omega(n)$ 表示 n 的所有不同的素因子的个数.

由 A 和 B 的定义我们有

$$\sum_{n\le x}\left(V(n)-p(n)\right)^2=1+\sum_{n\in A}\left(V(n)-p(n)\right)^2+\sum_{n\in B}\left(V(n)-p(n)\right)^2. \tag{3-34}$$

很显然 $n\in A$, 则 $n=p^\alpha$, $V(n)=\alpha p$. 因此

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A}\left(V(n)-p(n)\right)^2 &= \sum_{p^\alpha\le x}\left(\alpha\cdot p-p\right)^2=\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\sum_{p\le x^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\alpha p-p\right)^2\\ &= \sum_{p\le\sqrt{x}}p^2+\sum_{2<\alpha\le\ln x}\sum_{p\le x^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\alpha p-p\right)^2.\end{aligned} \tag{3-35}$$

由 Abel 求和公式和素数定理可得

$$\begin{aligned}&\sum_{p\le\sqrt{x}}p^2=x\cdot\pi(\sqrt{x})-2\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{x}}y\cdot\pi(y)\,dy\\ =\ &\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot x^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)-2\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{x}}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot y^2}{\ln^i y}+O\left(\frac{y^2}{\ln^{k+1}y}\right)\right]\,dy\\ =\ &x^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),\end{aligned} \tag{3-36}$$

这里 c_i $(i=1,\ 2,\cdots,k)$ 是常数, $c_1=\dfrac{2}{3}$.

同理, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{2<\alpha\leq\ln x}\sum_{p\leq x^{\frac{1}{\alpha}}}(\alpha p-p)^2&\leq\sum_{2<\alpha\leq\ln x}\sum_{p\leq x^{\frac{1}{3}}}(\alpha-1)^2\cdot p^2\\&\ll\ x^{\frac{2}{3}}\cdot\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\ln^3 x\ll x\cdot\ln^2 x.\end{aligned}\tag{3-37}$$

结合 (3-35), (3-36) 和 (3-37) 式可得

$$\sum_{n\in A}(V(n)-p(n))^2=x^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right).\tag{3-38}$$

现在我们来估计 (3-34) 中的主要误差项. 对任意正整数 $n\in B$, 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是 n 的标准分解式, 则 $s\geq 2$. 当 $\alpha_1=1$ 时, 有

$$(V(n)-p(n))^2=(p_1-p_1)^2=0.$$

若 $(V(n)-p(n))^2\neq 0$, 则有 $\alpha_1\geq 2$, $V(n)\leq\alpha_1 p_1$. 于是, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in B}(V(n)-p(n))^2&=\sum_{\substack{p_1^{\alpha}m\leq x\\ \alpha\geq 2,\ p(m)>p_1}}(V(p_1^{\alpha}m)-p_1)^2\\&\ll\ \sum_{2\leq\alpha\leq\ln x}\sum_{p_1\leq x^{\frac{1}{\alpha+1}}}\sum_{p_1<m\leq\frac{x}{p_1^{\alpha}}}(\alpha p_1-p_1)^2\\&\ll\ \sum_{2\leq\alpha\leq\ln x}\sum_{p_1\leq x^{\frac{1}{\alpha+1}}}\alpha^2p_1^2\cdot\frac{x}{p_1^{\alpha}}\\&\ll\ x^{\frac{4}{3}}\cdot\ln^2 x.\end{aligned}\tag{3-39}$$

结合 (3-34), (3-38) 和 (3-39) 我们立即得到

$$\sum_{n\leq x}(V(n)-p(n))^2=x^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 c_i $(i=1,\ 2,\cdots,k)$ 是常数, $c_1=\dfrac{2}{3}$. 这就证明了定理.

定理 3.10.2 对任意实数 $x>1$ 和给定的正整数 k, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}V(n)=x^2\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{d_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 d_i $(i=1,\ 2,\cdots,k)$ 是常数, $d_1=\dfrac{1}{2}$.

证明: 很显然对任意素数 p, 我们有 $V(p)=p$. 于是由素数定理有

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}V(n) &= \sum_{p\le x}V(p)+\sum_{\substack{p^\alpha\le x\\ \alpha\ge 2}}V(p^\alpha)+\sum_{\substack{p_1^\alpha\cdot m\le x\\ \alpha\ge 1,\ p(m)>p_1}}V\left(p_1^\alpha\cdot m\right)\\ &= \sum_{p\le x}p+O\left(\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\ \sum_{p\le x^{\frac{1}{\alpha}}}\alpha\cdot p\right)+O\left(\sum_{\alpha\le\ln x}\ \sum_{p\le x^{\frac{1}{\alpha+1}}}\ \sum_{m\le\frac{x}{p^\alpha}}\alpha\cdot p\right)\\ &= x\cdot\pi(x)-\int_{\frac{3}{2}}^{x}\pi(y)\ dy+O\left(x^{\frac{3}{2}}\cdot\ln x\right)\\ &= \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)-\int_{\frac{3}{2}}^{x}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot y}{\ln^i y}+O\left(\frac{y}{\ln^{k+1}y}\right)\right]\ dy\\ &= x^2\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{d_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),\end{aligned}$$

其中 d_i $(i=1,\ 2,\cdots,k)$ 是常数, $d_1=\dfrac{1}{2}$. 这就完成了定理的证明.

3.11 关于 Smarandache LCM 对偶函数的性质

根据 Smarandache LCM 函数的对偶函数 $SL^*(n)$ 定义有: $SL^*(1)=1$, $SL^*(2)=2$, $SL^*(3)=1$, $SL^*(4)=2$, $SL^*(5)=1$, $SL^*(6)=3$, $SL^*(7)=1$, $SL^*(8)=2$, $SL^*(9)=1$, $SL^*(10)=2\cdots$. 显然, 若 n 为奇数, 则 $SL^*(n)=1$, 目前人们对此函数的初等性质还了解得很少. 在本节中我们用初等方法研究了一个包含 $SL^*(n)$ 函数的 Dirichlet 级数的计算问题及 $SL^*(n)$ 的均值性质, 分别给出了精确计算公式和一个较强的渐近公式.

为了完成定理的证明, 我们需要几个引理.

引理 3.11.1 对于任意给定的正整数 n, 我们有

$$SL^*(n)=p^\alpha-1,$$

其中 p 为素数, α 为大于等于 1 的整数.

证明: 设 $SL^*(n)=k$, 则由 $SL^*(n)$ 的定义知:

$$[1,2,\cdots,k]\mid n\ 且\ (k+1)\dagger n.$$

否则有 $[1,2,\cdots,k,k+1]\mid n$, 这时 $SL^*(n)\ge k+1$, 与 $SL^*(n)=k$ 矛盾.

设 $k+1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为 $k+1$ 的标准分解式, 其中 p_i 为素数, $p_1<p_2<\cdots<p_s$, $\alpha_i\ge 1, i=1,2,\cdots,s$.

若 $s>1$, 则有 $p_1^{\alpha_1}\leq k$, $p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}\leq k$, 于是

$$p_1^{\alpha_1}\mid[1,2,\cdots,k],\quad p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}\mid[1,2,\cdots,k],$$

又 $(p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s})=1$, 故

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}\mid[1,2,\cdots,k].$$

即 $k+1\mid[1,2,\cdots,k]$, 所以 $k+1\mid n$, 矛盾. 故 $s=1$. 这说明 $k+1=p^\alpha$, 故 $k=p^\alpha-1$, 也就是 $SL^*(n)=p^\alpha-1$. 于是就完成了引理的证明.

引理 3.11.2 设 $L(n)$ 表示 $1,2,\cdots,n$ 的最小公倍数, 即 $L(n)=[1,2,\cdots,n]$, 则有

$$\ln(L(n))=n+O\left(n\cdot\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right),$$

其中 c 为一正常数.

证明: 见本书定理 4.4.2.

定理 3.11.1 对任意实数 $s>1$, 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{SL^*(n)}{n^s}$$

是绝对收敛的, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{SL^*(n)}{n^s}=\zeta(s)\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{(p^\alpha-1)(p^s-1)}{[1,2,\cdots,p^\alpha]^s},$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta- 函数, $\sum\limits_{p}$ 表示对所有素数求和.

证明: 由 $SL^*(n)$ 的定义我们可知: 如果 $[1,2,\cdots,k]\mid n$, 则有 $[1,2,\cdots,k]\leq n$, $\ln([1,2,\cdots,k])\leq\ln n$. 因此, 由引理 3.11.2 有

$$SL^*(n)=k\leq\ln n\quad\text{及}\quad\frac{SL^*(n)}{n^s}\leq\frac{\ln n}{n^s}.$$

所以, 当 $s>1$ 时, Dirichlet 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{SL^*(n)}{n^s}$ 是绝对收敛的. 由引理 3.11.1, $SL^*(n)=p^\alpha-1$, 那么有 $[1,2,\cdots,p^\alpha-1]\mid n$. 令 $n=[1,2,\cdots,p^\alpha-1]\cdot m$ 则 $p\dagger m$, 那么对于任意实数 $s>1$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{SL^*(n)}{n^s}=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{p}\sum_{\substack{n=1\\SL^*(n)=p^\alpha-1}}^{\infty}\frac{p^\alpha-1}{n^s}=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{p}\sum_{\substack{m=1\\p\dagger m}}^{\infty}\frac{p^\alpha-1}{[1,2,\cdots,p^\alpha-1]^s\cdot m^s}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{p^{\alpha}-1}{[1,2,\cdots,p^{\alpha}-1]^s}\sum_{\substack{m=1\\ p\nmid m}}^{\infty}\frac{1}{m^s}\\
&= \sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{p^{\alpha}-1}{[1,2,\cdots,p^{\alpha}-1]^s}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{p^s\cdot m^s}\right)\\
&= \sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{p^{\alpha}-1}{[1,2,\cdots,p^{\alpha}-1]^s}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\right)\\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}\right)\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{(p^{\alpha}-1)(p^s-1)}{[1,2,\cdots,p^{\alpha}]^s}\\
&= \zeta(s)\cdot\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{(p^{\alpha}-1)(p^s-1)}{[1,2,\cdots,p^{\alpha}]^s}.
\end{aligned}
$$

在定理 3.11.1 中取 $s=2$, 且注意到 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$, 我们有

推论 3.11.1 无穷级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{SL^*(n)}{n^2}$ 是绝对收敛的, 且有

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{SL^*(n)}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{(p^{\alpha}-1)(p^2-1)}{[1,2,\cdots,p^{\alpha}]^2},
$$

其中 $\displaystyle\sum_{p}$ 表示对所有素数求和.

定理 3.11.2 对任意的实数 $x>1$, 我们有渐近公式

$$
\sum_{n\le x}SL^*(n)=c\cdot x+O(\ln^2 x),
$$

其中 $\displaystyle c=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{(p^{\alpha}-1)(p-1)}{[1,2,\cdots,p^{\alpha}]}$.

证明: 由 $SL^*(n)$ 的定义, 引理 3.11.1 及引理 3.11.2, 我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\le x}SL^*(n) &= \sum_{\substack{[1,2,\cdots,p^{\alpha}-1]\cdot m\le x\\ p\nmid m}}(p^{\alpha}-1)=\sum_{[1,2,\cdots,p^{\alpha}-1]\le x}(p^{\alpha}-1)\sum_{\substack{m\le\frac{x}{[1,2,\cdots,p^{\alpha}-1]}\\ p\nmid m}}1\\
&= \sum_{[1,2,\cdots,p^{\alpha}-1]\le x}(p^{\alpha}-1)\left(\frac{x}{[1,2,\cdots,p^{\alpha}-1]}-\frac{x}{[1,2,\cdots,p^{\alpha}]}+O(1)\right)\\
&= x\cdot\sum_{[1,2,\cdots,p^{\alpha}-1]\le x}\frac{(p^{\alpha}-1)(p-1)}{[1,2,\cdots,p^{\alpha}]}+O\left(\sum_{[1,2,\cdots,p^{\alpha}-1]\le x}p^{\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \quad x \cdot \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{p} \frac{(p^{\alpha}-1)(p-1)}{[1, 2, \cdots, p^{\alpha}]} + O\left(\ln^{2} x\right)$$

$$= \quad c \cdot x + O\left(\ln^{2} x\right),$$

其中 $c = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{p} \frac{(p^{\alpha}-1)(p-1)}{[1, 2, \cdots, p^{\alpha}]}$.
于是完成了定理的证明.

3.12 Smarandache LCM 函数的均值

定理 3.12.1 任意给定正整数 k, 则对任意实数 $x > 2$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n \leq x} [SL(n) - S(n)]^{2} = \frac{2}{3} \cdot \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{\ln^{i} x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 是Riemann zeta- 函数, c_i $(i = 1,\ 2, \cdots,\ k)$ 是可计算常数.

证明: 事实上, 对任意正整数 $n > 1$, 设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ 是 n 的标准分解式, 则有

$$S(n) = \max\{S(p_1^{\alpha_1}),\ S(p_2^{\alpha_2}),\ \cdots,\ S(p_s^{\alpha_s})\} \equiv S(p^{\alpha}) \tag{3-40}$$

和

$$SL(n) = \max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_s^{\alpha_s}\}. \tag{3-41}$$

现在我们考虑和式

$$\sum_{n \leq x} [SL(n) - S(n)]^{2} = \sum_{n \in A} [SL(n) - S(n)]^{2} + \sum_{n \in B} [SL(n) - S(n)]^{2}, \tag{3-42}$$

其中 A 和 B 表示区间 $[1,\ x]$ 中的所有正整数的子集. $A = \{n | SL(n) = p^2, p$ 为任意素数, $n \in [1,\ x]\}$; $B = \{n | SL(n) = p^{\alpha}, \alpha = 1$ 或者 $\alpha \geq 3, n \in [1,\ x]\}$. 若 $n \in A$ 且 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$, 则 $n = p^2 m$, $p \dagger m$, 并且 $p_i^{\alpha_i} \leq p^2$, $i = 1,\ 2,\ \cdots s$. 注意到 $S(p_i^{\alpha_i}) \leq \alpha_i p_i$ 和 $\alpha_i \leq \ln n$, 由 $SL(n)$ 和 $S(n)$ 的定义我们有

$$\sum_{n \in A} [SL(n) - S(n)]^{2} = \sum_{\substack{mp^2 \leq x \\ SL(m) < p^2}} \left[p^2 - S(mp^2)\right]^{2}$$

$$= \sum_{\substack{mp^2 \leq x \\ SL(m) < p^2}} \left(p^4 - 2p^2 S(mp^2) + S^2(mp^2)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{mp^2\le x\\ SL(m)<p^2}} p^4 + O\left(\sum_{mp^2\le x} p^2\cdot p\cdot \ln x\right) + O\left(\sum_{mp^2\le x} p^2\cdot \ln^2 x\right)\\
&= \sum_{m\le\sqrt{x}}\ \sum_{m<p^2\le\frac{x}{m}} p^4 + O\left(\sum_{p^2\le\sqrt{x}}\ \sum_{p^2<m\le\frac{x}{p^2}} p^4\right) + O\left(x^2\right)\\
&= \sum_{m\le\sqrt{x}}\ \sum_{p\le\sqrt{\frac{x}{m}}} p^4 + O\left(\sum_{m\le\sqrt{x}}\ \sum_{p^2\le m} p^4\right) + O\left(x^2\right)\\
&= \sum_{m\le\sqrt{x}}\ \sum_{p\le\sqrt{\frac{x}{m}}} p^4 + O\left(x^2\right).
\end{aligned}
\tag{3-43}
$$

根据阿贝尔求和公式及素数定理可得

$$
\pi(x) = \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right),
$$

其中 a_i $(i=1,\ 2,\cdots,k)$ 是可计算常数, 且 $a_1=1$.

因此, 有

$$
\begin{aligned}
\sum_{p\le\sqrt{\frac{x}{m}}} p^4 &= \frac{x^2}{m^2}\cdot\pi\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right) - \int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{\frac{x}{m}}} 4y^3\cdot\pi(y)dy\\
&= \frac{x^2}{m^2}\cdot\pi\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right) - \int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{\frac{x}{m}}} 4y^3\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot y}{\ln^i y} + O\left(\frac{y}{\ln^{k+1} y}\right)\right]dy\\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{m^{\frac{5}{2}}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^i\sqrt{\frac{x}{m}}} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{m^{\frac{5}{2}}\cdot\ln^{k+1} x}\right),
\end{aligned}
\tag{3-44}
$$

这里我们用到估计式 $m\le\sqrt{x}$, 其中 b_i 是可计算常数, 且 $b_1=1$.

注意到 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\frac{5}{2}}}=\zeta\left(\frac{5}{2}\right)$, 和 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln^i m}{m^{\frac{5}{2}}}$ 对所有 $i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k$ 是收敛的. 所以由 (3-43) 和 (3-44) 可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\in A}\left[SL(n)-S(n)\right]^2\\
&= \sum_{m\le\sqrt{x}}\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^i\sqrt{\frac{x}{m}}} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{m^{\frac{5}{2}}\cdot\ln^{k+1} x}\right)\right] + O\left(x^2\right)\\
&= \frac{2}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot x^{\frac{5}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right),
\end{aligned}
\tag{3-45}
$$

其中 c_i $(i=1,\ 2,\ 3,\cdots,k)$ 是可计算常数, $c_1=1$.

现在我们来估计集合 B 上的和式. 对任意正整数 $n\in B$. 若 $n\in B$ 且 $SL(n)=p$, 则有 $S(n)=p$. 因此 $[SL(n)-S(n)]^2=[p-p]^2=0$. 若 $SL(n)=p^\alpha$ with $\alpha\geq 3$, 则有 $[SL(n)-S(n)]^2=[p^\alpha-S(n)]^2\leq p^{2\alpha}+\alpha^2p^2$ 和 $\alpha\leq\ln n$. 所以我们有

$$\sum_{n\in B}[SL(n)-S(n)]^2\ll\sum_{\substack{np^\alpha\leq x\\ \alpha\geq 3}}\left(p^{2\alpha}+p^2\ln^2 n\right)\ll x^2. \tag{3-46}$$

结合 (3-42), (3-45) 和 (3-46) 我们立即得到渐近公式

$$\sum_{n\leq x}[SL(n)-S(n)]^2=\frac{2}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot x^{\frac{5}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 c_i $(i=1,\ 2,\ 3,\cdots,k)$ 是可计算常数, $c_1=1$.

这就完成了定理的证明.

第四章 关于 $L(n)$ 函数的一些性质

数论函数 $L(n)$ 在初等数论中有着非常重要的意义, 它的许多性质早已被人们所熟悉. 本章将进一步研究该函数的极限性质, 比例性质及复合函数的均值性质等一系列问题.

4.1 引言

定义 4.1 对任意正整数 n, $L(n)$ 表示从 1 到 n 这 n 个数的最小公倍数. 即

$$L(n) = [1, 2, \cdots, n].$$

定义 4.2 算术函数 $\Omega(n)$ 定义为: 对任意正整数 n, 若 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式, 则

$$\Omega(n) = \Omega(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r.$$

定义 4.3 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$, 定义如下

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{如果} n = p^\alpha, \ p\text{是素数, 且}\alpha\text{是正整数;} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

定义 4.4 Smarandache LCM 数列是由 $SLS \longrightarrow L(1), L(2), \cdots, L(n), \cdots$ 来定义的. 另一个被称作Smarandache LCM 奇数序列的新的Smarandache SLOS 序列定义为: 对任意的正整数 n, 有 $SLOS(2n-1) = [1, 3, 5, \cdots, 2n-1]$.

4.2 关于 $L(n^2)$ 函数的一个极限

本节要讨论 $L(n)$ 函数的性质, 主要是用初等的方法研究关于 $L(n)$ 函数的一个极限. 为此先证明

引理 4.2.1 对任意实数 $x > 0$, 我们有渐近公式

$$\theta(x) = \sum_{p \le x} \ln p = x + O\left(x \exp\left(\frac{-c(\ln x)^{\frac{3}{5}}}{(\ln \ln x)^{\frac{1}{5}}}\right)\right),$$

其中 $c > 0$ 是常数, $\sum\limits_{p \le x}$ 表示对所有满足 $p \le x$ 的素数 p 求和.

证明: 事实上, 这是著名的素数定理的等价形式 (参阅文献 [6]).

定理 4.2.1 对任意正整数 n, 我们有渐近公式

$$\left(\frac{L(n^2)}{\prod\limits_{p\le n^2} p}\right)^{\frac{1}{n}} = e + O\left(\exp\left(-c\frac{(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right),$$

其中 $\prod\limits_{p\le n^2}$ 表示对所有满足 $p\le n^2$ 的素数 p 求积.

证明: 令

$$L(n^2) = [1,\ 2,\ \cdots,\ n^2] = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s} \tag{4-1}$$

是 $L(n^2)$ 的标准分解式, 那么令 $\alpha_i = \alpha(p_i)$ 表示 $1, 2, 3, \cdots, n^2$ 中 p_i 的最高次幂. 由于

$$\left(\frac{L(n^2)}{\prod\limits_{p\le n^2} p}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\frac{L(n^2)}{\prod\limits_{p\le n^2} p}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\ln L(n^2) - \frac{1}{n}\ln\prod_{p\le n^2} p\right). \tag{4-2}$$

但是

$$\begin{aligned}
\ln L(n^2) - \ln\prod_{p\le n^2} p &= \ln\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}\right) - \ln\prod_{p\le n^2} p\\
&= \sum_{p\le n^2}\alpha(p)\ln p - \sum_{p\le n^2}\ln p = \sum_{p\le n^2}(\alpha(p)-1)\ln p\\
&= \sum_{p\le n^{\frac{2}{3}}}(\alpha(p)-1)\ln p + \sum_{n^{\frac{2}{3}}<p\le n}(\alpha(p)-1)\ln p\\
&\quad + \sum_{n<p\le n^2}(\alpha(p)-1)\ln p.
\end{aligned} \tag{4-3}$$

很显然, 如果 $n < p_i \le n^2$, 那么 $\alpha(p_i) = 1$. 如果 $n^{\frac{2}{3}} < p_i \le n$, 那么我们有 $\alpha(p_i) = 2$ (事实上, 如果 $\alpha(p_i) \ge 3$, 则有 $p_i^3 > n$. 这与 $p_i \le n$ 矛盾). 如果 $p_i \le n^{\frac{2}{3}}$, 那么 $\alpha(p_i) \ge 3$.

因此由上述结论及引理 4.2.1, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n^{\frac{2}{3}}<p\le n}(\alpha(p)-1)\ln p &= \sum_{n^{\frac{2}{3}}<p\le n}(2-1)\ln p\\
&= \sum_{n^{\frac{2}{3}}<p\le n}\ln p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \theta(n)-\theta(\sqrt{n}) \\ &= n+O\left(\exp\left(-c\frac{(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right). \end{aligned} \tag{4-4}$$

$$\sum_{n<p\le n^2}(\alpha(p)-1)\ln p=\sum_{n<p\le n^2}(1-1)\ln p=0. \tag{4-5}$$

$$\sum_{p\le n^{\frac{2}{3}}}(\alpha(p)-1)\ln p=O\left(\ln^2 n\sum_{p\le n^{\frac{2}{3}}}1\right)=O\left(\ln^2 n\frac{n^{\frac{2}{3}}}{\ln n}\right)=O\left(n^{\frac{2}{3}}\ln n\right). \tag{4-6}$$

结合 (4-3), (4-4), (4-5) 和 (4-6) 我们可以得到

$$\begin{aligned} \ln L(n^2)-\ln\prod_{p\le n^2}p &= \sum_{p\le n^{\frac{2}{3}}}(\alpha(p)-1)\ln p+\sum_{n^{\frac{2}{3}}<p\le n}\ln p \\ &= O\left(n^{\frac{2}{3}}\ln n\right)+n+O\left(n\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right) \\ &= n+O\left(n\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right). \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \left(\frac{L(n^2)}{\prod\limits_{p\le n^2}p}\right)^{\frac{1}{n}} &= \exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln L(n^2)-\ln\prod_{p\le n^2}p\right)\right) \\ &= \exp\left[\frac{1}{n}\left[n+O\left(n\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right]\right] \\ &= \exp\left[1+O\left(\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right] \\ &= e\left[1+O\left(\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right] \\ &= e+O\left(\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right). \end{aligned}$$

这就完成了定理的证明.

由定理, 当 $n\to\infty$ 时, 我们可以立即得到如下推论

推论 4.2.1

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L(n^2)}{\prod\limits_{p\le n^2}p}\right)^{\frac{1}{n}}=e.$$

4.3 关于 $L(n^k)$ 函数的一个极限

在上节中我们已经研究了 $L(n^2)$ 函数的极限问题, 而在本节里要进一步讨论 $L(n^k)$ 函数的渐近公式, 同时也给出它的一个极限. 为了证明本节的定理, 首先给出

定理 4.3.1 对任意正整数 n 和偶数 k, 我们有渐近公式

$$\left(\frac{L(n^k)}{\prod\limits_{p\le n^k}p}\right)^{n^{-\frac{k}{2}}}=e+O\left(\exp\left(\frac{-c\left(\frac{k}{2}\ln n\right)^{\frac{3}{5}}}{(\ln k-\ln 2+\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right),$$

其中 $\prod\limits_{p\le n^k}$ 表示对所有满足 $p\le n^k$ 的素数 p 求积.

证明: 令

$$L(n^k)=[1,\ 2,\ \cdots,\ n^k]=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}\tag{4-7}$$

表示 $L(n^k)$ 标准分解式. $\alpha_i:=\alpha(p_i)$ 为 1, 2, 3, $\cdots$, n^k 的标准分解式中素数 p_i 的最高次幂.

首先我们有

$$\left(\frac{L(n^k)}{\prod\limits_{p\le n^k}p}\right)^{n^{-\frac{k}{2}}}=\exp\left(n^{-\frac{k}{2}}\ln\frac{L(n^k)}{\prod\limits_{p\le n^k}p}\right)=\exp\left(n^{-\frac{k}{2}}\left(\ln L(n^k)-\ln\prod_{p\le n^k}p\right)\right).\tag{4-8}$$

现在我们来计算 (4-8) 中右边那一项. 利用 (4-7) 我们可以得到

$$\begin{aligned}\ln L(n^k)-\ln\prod_{p\le n^k}p &= \ln\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}\right)-\ln\prod_{p\le n^k}p\\ &= \sum_{p\le n^k}\alpha(p)\ln p-\sum_{p\le n^k}\ln p\\ &= \sum_{p\le n^k}(\alpha(p)-1)\ln p\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{p\le n^{\frac{k}{k+1}}}(\alpha(p)-1)\ln p+\sum_{i=1}^{k}\sum_{n^{\frac{k}{i+1}}<p\le n^{\frac{k}{i}}}(\alpha(p)-1)\ln p \\
&:= M_0+\sum_{i=1}^{k}M_i. \qquad (4\text{-}9)
\end{aligned}
$$

注意到如果

$$n^{\frac{k}{i+1}}<p\le n^{\frac{k}{i}},$$

则 $\alpha(p)=i$. 利用引理 4.2.1 我们有

$$
\begin{aligned}
M_i &= (i-1)\sum_{n^{\frac{k}{i+1}}<p\le n^{\frac{k}{i}}}\ln p \\
&= (i-1)\left[\sum_{p\le n^{\frac{k}{i}}}\ln p-\sum_{p\le n^{\frac{k}{i+1}}}\ln p\right] \\
&= (i-1)\left[n^{\frac{k}{i}}-n^{\frac{k}{i+1}}+O\left(n^{\frac{k}{i}}\exp\left(\frac{-c\left(\frac{k}{i}\ln n\right)^{\frac{3}{5}}}{(\ln k-\ln i+\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right] \qquad (4\text{-}10)
\end{aligned}
$$

因此

$$\sum_{i=1}^{k}M_i=n^{\frac{k}{2}}+O\left(n^{\frac{k}{2}}\exp\left(\frac{-c\left(\frac{k}{2}\ln n\right)^{\frac{3}{5}}}{(\ln k-\ln 2+\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right). \qquad (4\text{-}11)$$

另一方面, 我们知道

$$
\begin{aligned}
M_0 &= O\left(\frac{k}{k+1}\ln^2 n\sum_{p\le n^{\frac{k}{k+1}}}1\right)=O\left(\frac{k}{k+1}\ln^2 n\frac{n^{\frac{k}{k+1}}}{\frac{k}{k+1}\ln n}\right) \\
&= O\left(n^{\frac{k}{k+1}}\ln n\right). \qquad (4\text{-}12)
\end{aligned}
$$

现在结合 (4-10), (4-11) 和 (4-12) 我们容易得到

$$\ln L(n^k)-\ln\prod_{p\le n^k}p=n^{\frac{k}{2}}+O\left(n^{\frac{k}{2}}\exp\left(\frac{-c\left(\frac{k}{2}\ln n\right)^{\frac{3}{5}}}{(\ln k-\ln 2+\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right). \qquad (4\text{-}13)$$

所以利用 (4-8) 以及 (4-13) 可以得到

$$\left(\frac{L(n^k)}{\prod\limits_{p\le n^k}p}\right)^{n^{-\frac{k}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(n^{-\frac{k}{2}}\left(\ln L(n^k) - \ln\prod_{p\le n^k} p\right)\right)\\
&= \exp\left[n^{-\frac{k}{2}}\left[n^{\frac{k}{2}} + O\left(n^{\frac{k}{2}}\exp\left(\frac{-c\left(\frac{k}{2}\ln n\right)^{\frac{3}{5}}}{(\ln k - \ln 2 + \ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right]\right]\\
&= \exp\left[1 + O\left(\exp\left(\frac{-c\left(\frac{k}{2}\ln n\right)^{\frac{3}{5}}}{(\ln k - \ln 2 + \ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right]\\
&= e\cdot\exp\left[O\left(\exp\left(\frac{-c\left(\frac{k}{2}\ln n\right)^{\frac{3}{5}}}{(\ln k - \ln 2 + \ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right]\\
&= e\left[1 + O\left(\exp\left(\frac{-c\left(\frac{k}{2}\ln n\right)^{\frac{3}{5}}}{(\ln k - \ln 2 + \ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right]\\
&= e + O\left(\exp\left(\frac{-c\left(\frac{k}{2}\ln n\right)^{\frac{3}{5}}}{(\ln k - \ln 2 + \ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right).
\end{aligned}$$

这就完成了定理 4.3.1 的证明.

从上述定理我们立即可以得到下面的极限公式

推论 4.3.1 对任意正整数 n 和偶数 k, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L(n^k)}{\prod\limits_{p\le n^k} p}\right)^{n^{-\frac{k}{2}}} = e.$$

4.4 关于 $L(n)$ 函数的一个比例性质

在前言部分我们已经定义了 $L(n)$ 函数以及一个新的 Smarandache LCM 序列, 即 Smarandache LCM 奇数序列 $SLOS$. 事实上我们同样可以定义 Smarandache LCM 偶数序列 $SLES$: 对任意的正整数 n, 有 $SLES(2n) = [2,4,6,\cdots,2n]$, 即 $SLES \longrightarrow$ 2, 4, 12 24, 240, $\cdots$. 如果令 T_n 表示这些数列的第 n 项, 则很容易看出

$$T_{2n+1}(SLES) = 2^n T_n(SLOS).$$

显然 $L(n)$ 和 $SLOS(2n-1)$ 都是两个新的 Smarandache 函数. 对这两个函数性质的研究应该说是比较少的, 但是它们却非常重要, 因为它可以揭示最小公倍数的性质. 本节主要是通过对 $L(n)$ 与 $SLOS(2n-1)$ 之间关系的研究, 得出一个

恒等式及渐近公式, 从而推出 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{[\ln(L(n))]^{\alpha}}$ 的收敛性. 首先给出以下

引理 4.4.1 如果 a, b 是两个正整数, 则 a 与 b 的最小公倍数 $[a,\ b]=\frac{ab}{(a,b)}$, 其中 (a,b) 表示 a 和 b 的最大公约数. 特别地, 当 $(a,b)=1$ 时, $[a,b]=ab$.

证明: 参阅文献 [11].

定理 4.4.1 对任意给定的正整数 n, 我们有恒等式

$$\frac{L(2n)}{L(n)}=\frac{2\cdot SLOS(2n-1)}{SLOS\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right)},$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

证明: 由 $L(n)$ 与 $SLOS(2n-1)$ 的定义可得

$$\begin{aligned}
L(2n) &= [1,2,\cdots,2n]\\
&= [[1,3,\cdots,2n-1],[2,4,\cdots,2n]]\\
&= [[1,3,\cdots,2n-1],2[1,2,\cdots,n]]\\
&= [SLOS(2n-1),2L(n)]\\
&= \frac{2\cdot L(n)\cdot SLOS(2n-1)}{(2L(n),SLOS(2n-1))}\\
&= \frac{2\cdot L(n)\cdot SLOS(2n-1)}{(L(n),SLOS(2n-1))}
\end{aligned}$$

或

$$\frac{L(2n)}{L(n)}=\frac{2\cdot SLOS(2n-1)}{(L(n),SLOS(2n-1))}. \tag{4-14}$$

现在我们只需证明

$$(L(n),SLOS(2n-1))=SLOS\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right). \tag{4-15}$$

对任意正整数 T_i, 设 $\mathrm{T}_i=2^{\alpha_i}t_i$ (其中 i 是一非负整数, t_i 是一奇数).

则由最小公倍数的定义有

$$\begin{aligned}
L(n) &= [1,2\cdots,n]=[2^{\alpha_1}t_1,2^{\alpha_2}t_2,\cdots,2^{\alpha_n}t_n]\\
&= 2^{\alpha}\left[1,3,5,\cdots,2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right],
\end{aligned}$$

这里 $\alpha=\max\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$. 于是

$$(L(n),SLOS(2n-1)) = \left(2^{\alpha}\left[1,3,\cdots,2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right],[1,3,\cdots,2n-1]\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\left[1,3,\cdots,2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right],[1,3,\cdots,2n-1]\right)\\
&= \left[1,3,\cdots,2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right]\\
&= SLOS\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right),
\end{aligned}
$$

即 (4-15) 成立. 再结合 (4-14) 与 (4-15), 可得恒等式

$$
\frac{L(2n)}{L(n)}=\frac{2\cdot SLOS(2n-1)}{SLOS\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right)}.
$$

于是完成了定理的证明.

定理 4.4.2 对任意给定的正整数 n, 有渐近公式

$$
\ln(L(n))=n+O\left(n\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right),
$$

其中 c 为一正常数.

证明: 令

$$
L(n)=[1,\ 2,\ \cdots,\ n]=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n},
$$

其中 p_i 是 $L(n)$ 不同的素因子, α_i 是所有 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 标准分解式中 p_i 的最高次幂. 因此

$$
\begin{aligned}
\ln(L(n)) &= \ln\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}\right)\\
&= \sum_{p\le n}\alpha(p)\ln p\\
&= \sum_{p\le n}\ln p+\sum_{p\le n}(\alpha(p)-1)\ln p\\
&= \theta(n)+\sum_{p\le\sqrt{n}}(\alpha(p)-1)\ln p+\sum_{\sqrt{n}\le p\le n}(\alpha(p)-1)\ln p,
\end{aligned}
$$

当 $p_i>\sqrt{n}$, 我们有 $\alpha_i=1$. 否则若 $\alpha_i\ge 2$, 则 $p_i^2>n$, 从而 $p_i^{\alpha_i}>n$, 这与 $p<n$ 矛盾. 即 $\sum\limits_{\sqrt{n}\le p\le n}(\alpha(p)-1)\ln p=0$. 所以

$$
\ln(L(n))=\theta(n)+\sum_{p\le\sqrt{n}}(\alpha(p)-1)\ln p.
$$

又 $p_i^{\alpha_i}<n$, 因此 $\alpha_i<\ln n$, $p<\ln n$, 再由引理 4.2.1 可得

$$
\ln(L(n)) = \theta(n)+O\left(\ln^2 n\sum_{p\le\sqrt{n}}1\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \theta(n)+O\left(\ln^2 n\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)\\
&= n+O\left(n\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)+O\left(\sqrt{n}\ln n\right)\\
&= n+O\left(n\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

这就完成了定理的证明.

由定理 4.4.2 我们立刻得到下面的

推论 4.4.1　*无穷级数*

$$
\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{[\ln(L(n))]^{\alpha}}
$$

当 $\alpha>1$ 时收敛, 当 $\alpha\leq 1$ 时发散.

证明:　事实上, 由定理 4.4.2 可得

$$
\begin{aligned}
[\ln(L(n))]^{\alpha} &= \left[n+O\left(n\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right]^{\alpha}\\
&= n^{\alpha}\left[1+O\left(\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right]^{\alpha},
\end{aligned}
$$

所以

$$
\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{[\ln(L(n))]^{\alpha}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\left[1+O\left(\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right]^{\alpha}}.
$$

因为

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{n^{\alpha}\left[1+O\left(\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right]^{\alpha}}=1,
$$

而调和级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 当 $\alpha>1$ 时收敛, 当 $\alpha\leq 1$ 时发散. 故由正项无穷级数的比较法则知当 $\alpha>1$ 时 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{[\ln(L(n))]^{\alpha}}$ 也收敛, 而当 $\alpha\leq 1$ 时该级数发散. 于是完成了推论的证明.

4.5　关于 $L(n)$ 函数的计算公式

前两节我们讨论了 $L(n)$ 函数的极限问题, 在本节中, 我们将研究 $L(n)$ 的计算问题, 并利用初等方法来给出它的计算公式. 即我们将要证明

定理 4.5.1 对任意正整数 $n>1$, 有计算公式

$$L(n)=\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\theta\left(n^{\frac{1}{k}}\right)\right)=\exp\left(\sum_{k\leq n}\Lambda(k)\right),$$

其中 $\exp(y)=e^y$, $\theta(x)=\sum\limits_{p\leq x}\ln p$, $\sum\limits_{p\leq x}$ 表示对所有 $p\leq x$ 的素数 p 求和, $\Lambda(n)$ 是Mangoldt 函数.

证明: 令

$$L(n)=[1,\ 2,\ \cdots,\ n]=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}=\prod_{p\leq n}p^{\alpha(p)} \tag{4-16}$$

表示 $L(n)$ 的标准分解式. 那么对 $1\leq i\leq s$, 存在一个正整数 $1<k\leq n$, 使得 $p_i^{\alpha_i}\parallel k$. 因此, 由 (4-16) 我们有

$$\begin{aligned}L(n) &= [1,\ 2,\ \cdots,\ n]=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}=\exp\left(\sum_{t=1}^{s}\alpha_t\ln p_t\right)\\ &= \exp\left(\sum_{p\leq n}\alpha(p)\ln p\right)=\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n^{\frac{1}{k+1}}<p\leq n^{\frac{1}{k}}}\alpha(p)\ln p\right).\end{aligned} \tag{4-17}$$

注意到如果 $n^{\frac{1}{k+1}}<p\leq n^{\frac{1}{k}}$, 那么有 $p^k\leq n$, $p^{k+1}>n$ 和 $\alpha(p)=k$. 因此, 由 (4-17) 我们有

$$\begin{aligned}L(n) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n^{\frac{1}{k+1}}<p\leq n^{\frac{1}{k}}}k\cdot\ln p\right)\\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\sum_{n^{\frac{1}{k+1}}<p\leq n^{\frac{1}{k}}}\ln p\right)\right)\\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}k\left[\theta\left(n^{\frac{1}{k}}\right)-\theta\left(n^{\frac{1}{k+1}}\right)\right]\right)\\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[k\theta\left(n^{\frac{1}{k}}\right)-(k+1)\theta\left(n^{\frac{1}{k+1}}\right)+\theta\left(n^{\frac{1}{k+1}}\right)\right]\right)\\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\theta\left(n^{\frac{1}{k}}\right)\right)=\exp\left(\sum_{k\leq n}\Lambda(k)\right),\end{aligned}$$

其中 $\theta(x)=\sum\limits_{p\leq x}\ln p$, $\Lambda(n)$ 是 Mangoldt 函数. 这就完成了定理的证明.

现在令 $d(n)$ 表示 Dirichlet 除数函数, $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解式. 则有

定理 4.5.2 对任意正整数 $n>1$, 我们有渐近公式

$$\Omega\left(L(n)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\pi\left(n^{\frac{1}{k}}\right).$$

证明: 事实上, 由 $\Omega(n)$ 的定义及定理 4.5.1 的证明方法, 我们有

$$\begin{aligned}
\Omega\left(L(n)\right) &= \sum_{p\le n}\alpha(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n^{\frac{1}{k+1}}<p\le n^{\frac{1}{k}}}\alpha(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n^{\frac{1}{k+1}}<p\le n^{\frac{1}{k}}}k\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}k\left(\sum_{n^{\frac{1}{k+1}}<p\le n^{\frac{1}{k}}}1\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}k\left[\pi\left(n^{\frac{1}{k}}\right)-\pi\left(n^{\frac{1}{k+1}}\right)\right]\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left[k\pi\left(n^{\frac{1}{k}}\right)-(k+1)\pi\left(n^{\frac{1}{k+1}}\right)+\pi\left(n^{\frac{1}{k+1}}\right)\right]\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\pi\left(n^{\frac{1}{k}}\right),
\end{aligned}$$

以及

$$\sum_{i=1}^{k-1}\frac{2^{i-1}}{p_i}-m=\frac{2^{k-1}}{p_k}.$$

其中 $\pi(x)=\sum_{p\le x}1$. 这就完成了定理的证明.

定理 4.5.3 对任意正整数 $n>1$, 我们有

$$d\left(L(n)\right)=\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\pi\left(n^{\frac{1}{k}}\right)\right),$$

其中 $\exp(y)=e^y$, $\pi(x)=\sum_{p\le x}1$.

证明: 由 Dirichlet 除数函数 $d(n)$ 的定义, 我们有

$$d\left(L(n)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{p\le n}(\alpha(p)+1)=\exp\left(\sum_{p\le n}\ln[\alpha(p)+1]\right)\\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n^{\frac{1}{k+1}}<p\le n^{\frac{1}{k}}}\ln[\alpha(p)+1]\right)\\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n^{\frac{1}{k+1}}<p\le n^{\frac{1}{k}}}\ln(k+1)\right)\\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\ln(k+1)\sum_{n^{\frac{1}{k+1}}<p\le n^{\frac{1}{k}}}1\right)\\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\ln(k+1)\left[\pi\left(n^{\frac{1}{k}}\right)-\pi\left(n^{\frac{1}{k+1}}\right)\right]\right)\\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln(k)\pi\left(n^{\frac{1}{k}}\right)-\ln(k+1)\pi\left(n^{\frac{1}{k+1}}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\pi\left(n^{\frac{1}{k}}\right)\right]\right)\\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\pi\left(n^{\frac{1}{k}}\right)\right).
\end{aligned}$$

于是完成了定理的证明.

由著名的素数定理和上面的结论, 我们立即得到

推论 4.5.1 对任意正整数 $n>1$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}[L(n)]^{\frac{1}{n}}=e \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty}[d\left(L(n)\right)]^{\frac{1}{\Omega(L(n))}}=2,$$

其中 $e=2.718281828459\cdots$ 是常数.

由上述定理和渐近公式

$$\theta(x)=\sum_{p\le x}\ln p = x+O\left(x\exp\left(-c\frac{(\ln x)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln x)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)$$

及

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $c>0$ 是常数 (参阅文献 [7]), 又可得

推论 4.5.2 对任意正整数 $n>1$, 我们有渐近公式

$$\Omega\left(L(n)\right)=\frac{n}{\ln n}+O\left(\frac{n}{\ln^2 n}\right).$$

4.6　一个包含 Smarandache LCM 比率数列的极限

如果我们令 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 分别表示任意正整数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的最大公约数和最小公倍数，r 为一正整数，再令

$$T(r,n) = \frac{[n, n+1, \cdots, n+r-1]}{[1, 2, \cdots, r]},$$

则称 $T(r,n)$ 为 r 阶 Smarandache LCM 比率数列. 在本节里主要讨论函数 $T(n,n)$ 的均值性质, 同时研究另外一个极限式 $\lim\limits_{n\to\infty}[T(n,n)]^{\frac{1}{n}}$, 并由此推出一个包含 Smarandache LCM 数列 $L(n)$ 的一个极限定理. 为此首先要证明

引理 4.6.1　对任意正整数 n, 我们有恒等式

$$[1, 2, \cdots, \cdots, 2n-1] = [n, n+1, \cdots, 2n-1].$$

证明:　因为对任意正整数 $1 \le i \le n$, 在连续的 n 个正整数 n, $n+1$, $\cdots$, $2n-1$ 中至少有一个数能够被 i 整除, 所以我们有 $i \mid [n, n+1, \cdots, 2n-1]$. 所以正整数 1, 2, $\cdots$, n 的最小公倍数也整除 $[n, n+1, \cdots, 2n-1]$, 即

$$[1, 2, \cdots, n] \mid [n, n+1, \cdots, 2n-1].$$

注意到对任意正整数 a 和 b 有 $ab = [a,b](a,b)$, 且当 a 整除 b 时有 $[a,b] = b$, $(a,b) = a$, 以及

$$[1, 2, 3, \cdots, s, s+1, \cdots, t] = [[1, 2, \cdots, s], [s, s+1, \cdots, t]],$$

从而我们有

$$\begin{aligned}
[1, 2, 3, \cdots, 2n-1] &= [[1, 2, \cdots, n], [n, n+1, \cdots, 2n-1]] \\
&= \frac{[1, 2, \cdots, n] \cdot [n, n+1, \cdots, 2n-1]}{([1, 2, \cdots, n], [n, n+1, \cdots, 2n-1])} \\
&= \frac{[1, 2, \cdots, n] \cdot [n, n+1, \cdots, 2n-1]}{[1, 2, \cdots, n]} \\
&= [n, n+1, \cdots, 2n-1].
\end{aligned}$$

于是证明了引理.

定理 4.6.1　对任意给定的正整数 n, 我们有渐近公式

$$T(n,n)^{\frac{1}{n}} = e + O\left(n \exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right),$$

其中 c 是一个正常数, $\exp(y)=e^y$.

证明: 显然对任意正整数 n, 由引理 4.6.1 我们有恒等式

$$\begin{aligned} T(n,n)^{\frac{1}{n}} &= \left[\frac{[n,n+1,\cdots,2n-1]}{[1,2,\cdots,n]}\right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \left[\frac{[1,2,\cdots,2n-1]}{[1,2,\cdots,n]}\right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \left[\frac{L(2n-1)}{L(n)}\right]^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \tag{4-18}$$

在 (4-18) 中令

$$L(2n-1)=[1,2,\cdots,2n-1]=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}\cdots p_s^{\alpha_s}$$

及

$$L(n)=[1,\ 2,\ \cdots,\ n]=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_j^{\beta_j}\cdots p_t^{\beta_t}$$

分别是 $L(2n-1)$ 与 $L(n)$ 的标准分解式, 且 $\alpha_i=\alpha(p_i)$ 和 $\beta_j=\beta(p_j)$ 分别是 1, 2, $\cdots$, $2n-1$ 的标准分解式中 p_i 与 1, 2, $\cdots$, n 的标准分解式中 p_j 的最高次方幂. 因为

$$\begin{aligned} \left(\frac{L(2n-1)}{L(n)}\right)^{\frac{1}{n}} &= \exp\left(\frac{1}{n}\ln\frac{L(2n-1)}{L(2n)}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln L(2n-1)-\ln L(n)\right)\right). \end{aligned} \tag{4-19}$$

而

$$\begin{aligned} & \ln(L(2n-1))-\ln(L(n)) \\ = & \ln\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}\cdots p_s^{\alpha_s}\right)-\ln\left(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_j^{\beta_j}\cdots p_t^{\beta_t}\right) \\ = & \sum_{p\le 2n-1}\alpha(p)\ln p-\sum_{p\le n}\beta(p)\ln p \\ = & \sum_{p\le 2n-1}\ln p+\sum_{p\le 2n-1}(\alpha(p)-1)\ln p-\left(\sum_{p\le n}\ln p+\sum_{p\le n}(\beta(p)-1)\ln p\right) \\ = & \sum_{p\le 2n-1}\ln p+\sum_{p\le\sqrt{2n-1}}(\alpha(p)-1)\ln p+\sum_{\sqrt{2n-1}<p\le 2n-1}(\alpha(p)-1)\ln p \\ & -\sum_{p\le n}\ln p-\sum_{p\le\sqrt{n}}(\beta(p)-1)\ln p-\sum_{\sqrt{n}<p\le n}(\beta(p)-1)\ln p. \end{aligned} \tag{4-20}$$

当 $\sqrt{2n-1} < p_i \leq 2n-1$ 时, 我们有 $\alpha_i = 1$. 否则若 $\alpha_i \geq 2$, 则 $p_i^2 > 2n-1$, 从而 $p_i^{\alpha_i} > 2n-1$, 这与 $p_i^{\alpha_i} \leq 2n-1$ 矛盾. 同理, 当 $\sqrt{n} < p_j \leq n$ 时, $\beta_j = 1$. 于是由引理 4.2.1 可得

$$\sum_{\sqrt{2n-1}<p\leq 2n-1} (\alpha(p)-1)\ln p = \sum_{\sqrt{n}<p\leq n} (\beta(p)-1)\ln p = 0. \tag{4-21}$$

$$\sum_{n<p\leq 2n-1} \ln p = \theta(2n-1) - \theta(n) = n + O\left(n \exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right). \tag{4-22}$$

注意到当 $\alpha_i \geq 2$ 时, $\alpha_i < \ln n$, $p_i \leq \sqrt{n}$, 因此

$$\sum_{p\leq\sqrt{2n-1}} (\alpha(p)-1)\ln p = O\left(\sum_{p\leq\sqrt{2n-1}} \ln n \ln p\right) = O\left(\sqrt{n}\ln n\right). \tag{4-23}$$

$$\sum_{p\leq\sqrt{n}} (\beta(p)-1)\ln p = O\left(\sum_{p\leq\sqrt{n}} \ln n \ln p\right) = O\left(\sqrt{n}\ln n\right). \tag{4-24}$$

结合 (4-20), (4-21), (4-22), (4-23) 和 (4-24) 式, 我们可得到

$$\begin{aligned}
& \ln(L(2n-1)) - \ln(L(n)) \\
= & \sum_{n<p\leq 2n-1} \ln p + \sum_{p\leq\sqrt{2n-1}} (\alpha(p)-1)\ln p - \sum_{p\leq\sqrt{n}} (\beta(p)-1)\ln p \\
= & \theta(2n-1) - \theta(n) + O\left(\sqrt{n}\ln n\right) \\
= & n + O\left(n \exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right).
\end{aligned} \tag{4-25}$$

再结合 (4-18) 及 (4-25) 式就可推出

$$\begin{aligned}
T(n,n)^{\frac{1}{n}} &= \left[\frac{L(2n-1)}{L(n)}\right]^{\frac{1}{n}} \\
&= \exp\left(\frac{1}{n}(\ln L(2n-1) - \ln L(n))\right) \\
&= \exp\left[\frac{1}{n}\left[n + O\left(n\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right]\right] \\
&= \exp\left[1 + O\left(\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right] \\
&= e\left[1 + O\left(\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

$$= \quad e + O\left(\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right),$$

其中 $\exp(y) = e^y$. 于是完成了定理的证明.

由定理 4.6.1 我们立刻得到下面的

推论 4.6.1 *在前面的记号下, 我们有极限式*

$$\lim_{n\to\infty}[T(n,n)]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}[L(n)]^{\frac{1}{n}} = e.$$

证明: 显然在定理 4.6.1 中令 $n \to \infty$ 可得到极限

$$\lim_{n\to\infty} T(n,n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left[e + O\left(\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right] = e.$$

用同样的方法, 也容易推出极限

$$\lim_{n\to\infty}[L(n)]^{\frac{1}{n}} = e.$$

事实上因为

$$[L(n)]^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln L(n)\right).$$

由定理 4.6.1 的证明方法我们有

$$\begin{aligned}
\ln(L(n)) &= \ln\left(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_t^{\beta_t}\right) \\
&= \sum_{p\le n} \beta(p)\ln p \\
&= \sum_{p\le n}\ln p + \sum_{p\le n}(\beta(p)-1)\ln p \\
&= \sum_{p\le n}\ln p + \sum_{p\le\sqrt{n}}(\beta(p)-1)\ln p + \sum_{\sqrt{n}\le p\le n}(\beta(p)-1)\ln p \\
&= n + O\left(n\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right).
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
[L(n)]^{\frac{1}{n}} &= \exp\left(\frac{1}{n}\ln L(n)\right) \\
&= \exp\left[\frac{1}{n}\left[n + O\left(n\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right]\right] \\
&= e + O\left(\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right).
\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}[L(n)]^{\frac{1}{n}} = e.$$

这就完成了推论的证明.

4.7 一个包含 F.Smarandache 函数的混合均值

在本章的最后一节, 我们来讨论包含 $L(n)$ 函数的均值问题, 即复合函数 $S(L(n))$ 的均值性质. 在本节里将得到一个关于 $S(L(n))$ 函数的渐近公式. 为此需要下面的

引理 4.7.1 设 p_n 表示第 n 个素数, $d_n = p_{n+1} - p_n$, 则有估计式

$$\sum_{p_n \le x} {d_n}^2 \ll x^{\frac{23}{18}+\varepsilon},$$

其中 ε 表示任意给定的正数.

证明: 这是 D.R.Heath-Brown 的一个著名结果, 参阅文献 [13].

定理 4.7.1 对任意实数 $x \ge 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x} S(L(n)) = \frac{1}{2}x^2 + O\left(x^{\frac{23}{18}+\varepsilon}\right),$$

其中 ε 表示任意给定的正数.

证明: 设 ${p_1}^{\beta_1}{p_2}^{\beta_2}\cdots{p_s}^{\beta_s}$ 为 $L(n)$ 的标准分解式, 考虑到当 $\sqrt{n} < p_i \le n$ 时, $\beta_i = \beta(p_i) = 1$. 所以有

$$\begin{aligned} L(n) &= [1,\ 2,\cdots,\ n] = {p_1}^{\beta(p_1)}{p_2}^{\beta(p_2)}\cdots{p_s}^{\beta(p_s)} \\ &= \prod_{p\le\sqrt{n}} p^{\beta(p)} \prod_{\sqrt{n}<p\le n} p\ . \end{aligned}$$

由于 ${p_i}^{\beta(p_i)} \le n$, 所以对较大的 n, 注意到 $\dfrac{n}{2} \le p_{\pi(n)} \le n$，所以当 $\beta(p_i) \ge 2$ 时, 由函数 $S(n)$ 的定义及性质有

$$S(p_i^{\beta(p_i)}) \le \beta(p_i)p_i \le \beta(p_i)\sqrt{n} \le \sqrt{n}\ln n \le p_{\pi(n)},$$

现在根据函数 $S(n)$ 的性质, 我们立刻推出当 n 较大时函数 $S(L(n))$ 满足

$$S(L(n)) = \max\{S({p_1}^{\beta_1}), S({p_2}^{\beta_2}), \cdots, S({p_s}^{\beta_s})\} = p_{\pi(n)}.$$

从而我们有

$$\sum_{n\le x} S(L(n)) \quad = \quad \sum_{n\le x} p_{\pi(n)} + O(1)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p_1\le n<p_2} p_{\pi(n)} + \sum_{p_2\le n<p_3} p_{\pi(n)} + \cdots + \sum_{p_{\pi(x)}\le n<x} p_{\pi(n)} + O(1)\\
&= p_1(p_2-p_1)+p_2(p_3-p_2)+\cdots+p_{\pi(x)}(x-p_{\pi(x)})+O(1)\\
&= -\frac{1}{2}(p_2-p_1)^2+\frac{1}{2}{p_2}^2-\frac{1}{2}{p_1}^2-\frac{1}{2}(p_3-p_2)^2+\frac{1}{2}{p_3}^2-\frac{1}{2}{p_2}^2\\
&\quad -\cdots-\frac{1}{2}(x-p_{\pi(x)})^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}p_{\pi(x)}^2+O(1)\\
&= \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\sum_{p_n\le x}(p_{n+1}-p_n)^2+O(1).
\end{aligned}$$

结合引理 4.7.1 及上式我们立刻推出

$$\sum_{n\le x} S(L(n)) = \frac{1}{2}x^2 + O\left(x^{\frac{23}{18}+\varepsilon}\right).$$

于是完成了定理的证明.

第五章　无穷级数及其性质

无穷级数的收敛问题也是数论中的一个重要内容, 本章主要是研究一些特殊级数如: 包含六边形数的级数, 包含伪 Smarandache 函数的级数等的求和问题, 并得到了一些渐近公式. 此外, 还研究了关于原数函数的倒数均值, 恒等式及一类包含原数函数的方程的正整数解问题.

5.1　六边形数的性质

在本节里, 我们要研究关于六边形数的一个性质, 即 Dirichlet 级数 $f(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^s(n)}$ 的敛散性问题, 并给出了一个相关的等式.

定义 5.1.1　对于任意正整数 m, 当 $n = m(2m-1)$ 时, 称这样的正整数 n 为六边形数 (参阅文献 [4]). 例如 $1, 6, 15, 28, \cdots$ 就是六边形数. 这些数也是算术级数

$$1, 5, 9, 13, \cdots, 4n+1, \cdots$$

的部分和. 同时我们定义 $a(n) = \max\{m(2m-1) : m(2m-1) \le n\}$, 并称 $a(n)$ 为 n 的六边形部分.

下面我们来证明

定理 5.1.1　对于任意实数 $s > 1$, 无穷级数 $f(s)$ 是收敛的, 且

$$f(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2(n)} = \frac{5}{3}\pi^2 - 16\ln 2.$$

证明:　首先, 由 $a(n)$ 的定义可知方程 $a(n) = m(2m-1)$ 存在

$$(m+1)(2m+1) - m(2m-1) = 4m+1$$

个解. 因此我们可得

$$f(s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^s(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ a(n)=m(2m-1)}}^{\infty} \frac{1}{a^s(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4m+1}{m^s(2m-1)^s}.$$

这样我们就可以推断出当 $2s-1 > 1$, 也就是 $s > 1$ 时, $f(s)$ 是收敛的.

现在我们来计算 $f(2)$ 的精确值. 利用上式有

$$f(2) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4m+1}{m^2(2m-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{12}{(2m-1)^2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8}{m(2m-1)}\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}+12\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2}\right)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8}{m(2m-1)}\\
&= \zeta(2)+12\left(\zeta(2)-\frac{1}{4}\zeta(2)\right)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8}{m(2m-1)}\\
&= 10\zeta(2)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8}{m(2m-1)}\\
&= 10\zeta(2)-16\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m}\right)\\
&= 10\zeta(2)-16\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right),
\end{aligned}$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann zeta- 函数.

由 $\ln(1+x)$ 的泰勒展开式我们知道

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots.$$

在这个等式中取 $x=1$ 立即可得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots.$$

由上式及 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$ 我们可以得到

$$f(2)=10\zeta(2)-16\ln 2=\frac{5}{3}\pi^2-16\ln 2.$$

这就完成了定理的证明.

5.2 关于六边形数的一个级数

我们知道六边形数是自然数与几何图形的一种内在联系, 而自然数 $n(2n-1)$ 给出的是六边形数的具体表示形式, 上一节已经讨论了有关六边形数的一个等式问题, 本节不直接来研究六边形数的性质, 但是所涉及的内容与六边形数密切相关.

定理 5.2.1 对任意给定的实数 $x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{a(n)}=\ln x+2\gamma+5\ln 2+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

其中 γ 是Euler常数.

证明： 对于任意实数 $x>1$, 设 m 是最大的正整数使得

$$m(2m-1)\leq x<(m+1)(2m+1),$$

这时由引理 5.2.3 的证明过程不难推出不等式

$$\frac{-3+\sqrt{8x+1}}{4}<m\leq\frac{1+\sqrt{8x+1}}{4}.$$

也就是

$$\left|m-\frac{1}{2}\sqrt{2x}\right|<1.$$

应用引理 5.2.1 以及上面的估计式, 并注意到 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}=2\ln 2$, 于是有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{1}{a(n)} &= \sum_{k=1}^{m}\frac{4k+1}{k(2k-1)}+\sum_{m(2m-1)<n\leq x}\frac{1}{b(n)}\\ &= 2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+3\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k(2k-1)}+O\left(\frac{x-m(2m-1)}{m(2m-1)}\right)\\ &= 2\ln m+2\gamma+O\left(\frac{1}{m}\right)+6\ln 2+O\left(\frac{1}{m}\right)\\ &= \ln x+2\gamma+5\ln 2+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).\end{aligned}$$

于是完成了定理的证明.

5.3 关于正整数的六边形数的补数部分

在上一节, 我们定义了数论函数 $a(n)$, 现在我们通过函数 $a(n)$ 定义另外一个数论函数.

定义 5.3.1 对于任意正整数 n, 数论函数 $b(n)$ 定义如下

$$b(n)=n-a(n)$$

即 $a(n)$ 表示六边形数的补数部分.

本节主要讨论函数 $b(n)$ 的均值性质, 以及 $b(n)$ 与除数函数 $\sigma(n)$, $b(n)$ 与 Euler 函数的混合均值性质.

首先我们需要下面几个引理.

引理 5.3.1 对于任意正整数 $n>1$, 设 $a(n)=m(2m-1)$, 则我们有渐近公式

$$m=\frac{\sqrt{2n}}{2}+O(1).$$

证明: 对于任意正整数 $n>1$, 设 $a(n)=m(2m-1)$. 则由 $a(n)$ 的定义可得

$$m(2m-1)\le n<(m+1)(2m+1).$$

由不等式 $m(2m-1)\le n$ 不难推出

$$\frac{1-\sqrt{8n+1}}{4}\le m\le \frac{1+\sqrt{8n+1}}{4},$$

再由不等式 $n<(m+1)(2m+1)$ 便可推出

$$m<\frac{-3-\sqrt{8n+1}}{4}\quad 或者\quad m>\frac{-3+\sqrt{8n+1}}{4}.$$

注意到 m 的定义并结合以上几个不等式不难得到

$$\frac{-3+\sqrt{8n+1}}{4}<m\le \frac{1+\sqrt{8n+1}}{4}.$$

即

$$m=\frac{\sqrt{2n}}{2}+O(1).$$

于是就证明了引理 5.3.1.

引理 5.3.2 令 $f(x)$ 表示一个维数为 n 的整系数多项式，对于所有满足 $f(m)>0$ 的正整数 m 有

$$\sum_{m\le x}\sigma(f(m))=\frac{\beta a_n}{n+1}x^{n+1}+O(x^n\log^n x),$$

其中 $\beta=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{N(d)}{d^2}$, a_n 是 $f(x)$ 中 x^n 的系数. ($N(m)$ 表示同余式的解数, 不包括重数.)

证明: 参阅文献 [14].

引理 5.3.3 令 $x>1$, 则有

$$\sum_{n\le x}\varphi(n)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\log x).$$

证明: 参阅文献 [4], [12].

定理 5.3.1 对任意给定的实数 $x>1$，我们有

$$\sum_{n<x}b(n)=\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}+O(x).$$

证明: 对任意实数 $x \geq 1$, 令 M 是最大的正整数，使得 $M(2M-1) < x < (M+1)(2M+1)$. 注意到如果 n 取遍区间 $[m(2m-1),(m+1)(2m+1))$ 上的整数, 则 $b(n)$ 取遍区间 $[0,4m]$ 上的整数. 结合引理 5.3.1 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} b(n) &= \sum_{n\leq M(2M-1)} b(n) + \sum_{M(2M-1)<n\leq x} b(n) \\
&= \sum_{m\leq M}\sum_{i\leq 4m} i + \sum_{i\leq x-M(2M-1)} i \\
&= \sum_{m\leq M} 2m(4m+1) + O\left(\frac{(x-M(2M-1))^2}{2}\right) \\
&= \frac{4}{3}M(M+1)(2M+1) + O(x) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} + O(x).
\end{aligned}$$

于是完成了定理的证明.

定理 5.3.2 对任意给定的实数 $x > 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} \sigma(f(a(n))) = \frac{2^{\frac{3}{2}n+1}\beta a_n}{(n+1)(n+2)} x^{\frac{n+2}{2}} + O(x^{\frac{n+1}{2}} \log^n x),$$

其中 $\beta = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{N(d)}{d^2}$, a_n 是 $f(x)$ 中 x^n 的系数. ($N(m)$ 表示同余式的解数, 不包括重数.)

证明: 由 $a(n)$ 的定义，注意到

$$x - M(2M-1) < (M+1)(2M+1) - M(2M-1) = 4M+1,$$

结合引理 5.3.1 和引理 5.3.2 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} \sigma(f(a(n))) &= \sum_{n\leq M(2M-1)} \sigma(f(a(n))) + \sum_{M(2M-1)<n\leq x} \sigma(f(a(n))) \\
&= \sum_{m\leq M}\sum_{i\leq 4m} \sigma(f(i)) + \sum_{i\leq 4M} \sigma(f(i)) \\
&= \sum_{m\leq M}\left(\frac{\beta a_n}{n+1}(4m)^{n+1} + O((4m)^n \log^n(4m))\right) \\
&\quad + \frac{\beta a_n}{n+1}(4M)^{n+1} + O\left((4M)^n \log^n(4M)\right) \\
&= \frac{4^{n+1}\beta a_n}{n+1}\sum_{m\leq M} m^{n+1} + O(M^{n+1}\log^n M) \\
&= \frac{4^{n+1}\beta a_n}{(n+1)(n+2)} M^{n+2} + O(M^{n+1}\log^n M)
\end{aligned}$$

$$= \quad \frac{2^{\frac{3}{2}n+1}\beta a_n}{(n+1)(n+2)}x^{\frac{n+2}{2}} + O(x^{\frac{n+1}{2}}\log^n x).$$

于是完成了定理的证明.

定理 5.3.3 对任意给定的实数 $x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\varphi(a(n)) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}x^{\frac{3}{2}} + O(x\log x).$$

我们可以用定理 5.3.2 的证明方法来完成定理 5.3.3 的证明.

5.4 关于伪 Smarandache 函数的一个级数

在本节里我们要讨论一个关于伪 Smarandache 函数的一个级数的收敛问题, 并且可以利用初等方法来给出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K^s(n)} \tag{5-1}$$

的精确计算公式.

定义 5.4.1 对任意正整数 n, 伪Smarandache 函数 $K(n)$ 定义为

$$K(n)=m,\quad 其中\ m=\frac{n(n+1)}{2}+k,$$

这里 k 是使得 n 整除 m 的最小正整数.

定理 5.4.1 对任意实数 $s>\frac{1}{2}$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K^s(n)}$ 收敛, 并且有

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K(n)}=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{5}{6}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K^2(n)}=\frac{11}{108}\cdot\pi^2-\frac{22+2\ln 2}{27}$.

证明: 首先, 我们来证明级数 (5-1) 是收敛的. 事实上, 对任意正整数 n, 由 $K(n)$ 的定义可知: 当 n 是奇数时, $K(n)=\frac{n(n+3)}{2}$; 当 n 是偶数时, $K(n)=\frac{n(n+2)}{2}$. 由此, 我们可以立即得到

$$\frac{n^2}{2}<K(n)<\frac{(n+3)^2}{2}$$

或者

$$\frac{1}{(n+3)^{2s}}\ll\frac{1}{K^s(n)}\ll\frac{1}{n^{2s}}.$$

因此, 当 $s > \frac{1}{2}$ 时, 级数 (5-1) 是收敛的.

现在我们来证明 (a), 根据 $K(n)$ 的性质有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K(2n-1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K(2n)}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)}\\
&= \frac{2}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{2}{3}\cdot\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n\le N}\frac{1}{2n-1}-\sum_{n\le N}\frac{1}{2n+2}\right)+\frac{1}{2}\\
&= \frac{2}{3}\cdot\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n\le 2N}\frac{1}{n}-\frac{1}{2N+2}+\frac{1}{2}-\sum_{n\le N}\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}. \qquad (5\text{-}2)
\end{aligned}$$

注意到对任意 $N > 1$, 我们有渐近公式 (参阅文献 [4] 中的定理 3.2)

$$\sum_{n\le N}\frac{1}{n} = \ln N + \gamma + O\left(\frac{1}{N}\right), \qquad (5\text{-}3)$$

其中 γ 是 Euler 函数.

结合 (5-2) 和 (5-3), 我们立即得到

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K(n)} &= \frac{2}{3}\cdot\lim_{N\to\infty}\left[\ln(2N)+\gamma+\frac{1}{2}-\ln N-\gamma+O\left(\frac{1}{N}\right)\right]+\frac{1}{2}\\
&= \frac{2}{3}\ln 2+\frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

这就证明了 (a).

对于 (b), 由 $K(n)$ 的定义和性质, 我们同样有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K^2(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K^2(2n-1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K^2(2n)}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2(n+1)^2}. \qquad (5\text{-}4)
\end{aligned}$$

注意到恒等式

$$\frac{1}{(2n-1)^2(n+1)^2} = \frac{2}{27}\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{9}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{9}\frac{1}{(2n+2)^2}; \quad (5\text{-}5)$$

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2}=2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}; \tag{5-6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8} \quad 和 \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-1. \tag{5-7}$$

结合 (5-3), (5-4), (5-5), (5-6) 和 (5-7), 则有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K^2(n)} &= \frac{2}{27}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{9}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+2)^2}\right)\\ &\quad +\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ &= \frac{2}{27}\cdot\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n\le N}\frac{1}{2n+2}-\sum_{n\le N}\frac{1}{2n-1}\right]+\frac{\pi^2}{72}+\frac{\pi^2}{216}-\frac{1}{36}\\ &\quad +\frac{1}{2}\cdot\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n\le N}\frac{1}{n+1}-\sum_{n\le N}\frac{1}{n}\right]+\frac{\pi^2}{24}+\frac{\pi^2}{24}-\frac{1}{4}\\ &= \frac{2}{27}\cdot\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{2}+\ln N-\ln(2N)+O\left(\frac{1}{N}\right)\right]+\frac{\pi^2}{54}-\frac{1}{36}\\ &\quad -\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{4}\\ &= \frac{11}{108}\cdot\pi^2-\frac{22+2\ln 2}{27}.\end{aligned}$$

这就证明了 (b). 从而定理证毕.

事实上, 对任意正整数 s, 利用我们的方法都可以给出 (5-1) 的精确计算公式. 只是当 s 充分大时, 其计算公式是非常复杂的.

5.5 关于原数函数 $S_p(n)$ 的倒数均值

在本节里我们将要研究原数函数 $S_p(n)$ 的倒数均值问题. 首先我们给出

定义 5.5.1 对任意正整数 n, 定义幂 p 的原数函数 $S_p(n)$ 为最小的正整数 m 使得 $p^n|m$. 即 $S_p(n)=\min\{m:\ p^n|m!\}$, 其中 p 为素数.

为了完成本节定理的证明, 我们需要下面的

引理 5.5.1 对于任意正整数 $p>1$, 有恒等式

$$\sum_{\beta=1}^{\infty}\frac{\beta}{p^\beta}=\frac{p}{(p-1)^2}, \tag{5-8}$$

$$\sum_{\beta=1}^{\infty}\frac{\beta^2}{p^\beta}=\frac{p(p+1)}{(p-1)^3}. \tag{5-9}$$

证明: 先证明 (5-8) 式. 不妨设 $T=\sum_{\beta=1}^{\infty}\frac{\beta}{p^\beta}$, 则有

$$T=\sum_{\beta=1}^{\infty}\frac{\beta}{p^\beta}=\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p^3}+\cdots,$$

或

$$\frac{T}{p}=\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^3}+\frac{3}{p^4}+\cdots.$$

上述两式相减就有

$$T\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\cdots=\frac{1}{p-1}.$$

所以

$$T=\frac{p}{(p-1)^2}.$$

这样就完成了 (5-8) 式的证明.

下面我们借助于 (5-8) 式来完成 (5-9) 式的证明. 令 $S=\sum_{\beta=1}^{\infty}\frac{\beta^2}{p^\beta}$, 则有

$$S=\sum_{\beta=1}^{\infty}\frac{\beta^2}{p^\beta}=\frac{1}{p}+\frac{4}{p^2}+\frac{9}{p^3}+\frac{16}{p^4}\cdots,$$

或

$$\frac{S}{p}=\frac{1}{p^2}+\frac{4}{p^3}+\frac{9}{p^4}+\frac{16}{p^5}+\cdots.$$

上述两式相减并应用 (5-8) 式可得

$$S\left(1-\frac{1}{p}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{p^{n+1}}=\frac{1}{p-1}+\frac{2}{p}\frac{p}{(p-1)^2}=\frac{p+1}{(p-1)^2},$$

所以

$$S=\frac{p(p+1)}{(p-1)^3}.$$

于是完成了引理的证明.

定理 5.5.1 设 p 为任意给定的素数, 那么对任意实数 $x\geq 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{S_p(n)}=\frac{1}{p-1}\left[\ln x+\ln(p-1)+\gamma-\frac{p}{p-1}\ln p\right]+O\left(\frac{\ln^2(xp)}{x\ln^2 p}\right),$$

这里 γ 为 *Euler* 常数.

证明： 事实上对任意实数 $x>1$, 不失一般性可假定 x 为整数. 于是对给定的素数 p, 根据文献 [8] 有

$$S_p(x)=(p-1)x+O\left(\frac{p}{\ln p}\ln x\right). \tag{5-10}$$

同时，对于任意实数 $y>1$，由 Euler 求和公式容易得到渐近公式 (参阅文献 [4])

$$\sum_{n\le y}\frac{1}{n}=\ln y+\gamma+O\left(\frac{1}{y}\right), \tag{5-11}$$

其中 γ 为 Euler 常数.

对于任意正整数 n, 设 $S_p(n)=m$, 由 $S_p(n)$ 的性质知当 $p^\alpha\|m$ 时，恰好有 α 个不同的正整数 n 满足 $S_p(n)=m$. 于是我们有

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{S_p(n)}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n\le x\\ S_p(n)=m}}\frac{1}{m}.$$

由 (5-10) 式知 m 几乎在 $1\le m\le(p-1)x$ 范围内, 所产生的误差最多是 $O\left(\frac{p}{\ln p}\ln x\right)$. 在 $S_p(n)=m$ 中, n 重复的个数最多有 $\frac{\ln(xp)}{\ln p}$, 所以应用 (5-11) 式我们可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\frac{1}{S_p(n)} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n\le x\\ S_p(n)=m}}\frac{1}{m}=\sum_{m\le(p-1)x}\sum_{\substack{n\le x\\ S_p(n)=m}}\frac{1}{m}+O\left(\frac{\ln x}{x\ln p}\frac{\ln(xp)}{\ln p}\right)\\
&= \sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\substack{m\le(p-1)x\\ p^\alpha\|m}}\frac{\alpha}{m}+O\left(\frac{\ln^2(xp)}{x\ln^2 p}\right)\\
&= \sum_{\alpha\le\frac{\ln((p-1)x)}{\ln p}}\frac{\alpha}{p^\alpha}\sum_{\substack{m\le\frac{(p-1)x}{p^\alpha}\\ (m,p)=1}}\frac{1}{m}+O\left(\frac{\ln^2(xp)}{x\ln^2 p}\right)\\
&= \sum_{\alpha\le\frac{\ln((p-1)x)}{\ln p}}\frac{\alpha}{p^\alpha}\left\{\sum_{m\le\frac{(p-1)x}{p^\alpha}}\frac{1}{m}-\frac{1}{p}\sum_{m\le\frac{(p-1)x}{p^{\alpha+1}}}\frac{1}{m}\right\}+O\left(\frac{\ln^2(xp)}{x\ln^2 p}\right)\\
&= \frac{p-1}{p}\sum_{\alpha\le\frac{\ln((p-1)x)}{\ln p}}\frac{\alpha}{p^\alpha}\left\{\ln\frac{(p-1)x}{p^\alpha}+\gamma+\frac{\ln p}{p-1}+\right.\\
&\quad \left.O\left(\frac{p^{\alpha-1}}{x}\right)\right\}+O\left(\frac{\ln^2(xp)}{x\ln^2 p}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{p-1}{p}\left(\ln x+\ln(p-1)+\gamma+\frac{\ln p}{p-1}\right)\left(\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\alpha}{p^{\alpha}}\right)- \\
&\quad \frac{p-1}{p}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\alpha^2\ln p}{p^{\alpha}}+O\left(\frac{\ln^2(xp)}{x\ln^2 p}\right) \\
&= \frac{1}{p-1}\left(\ln x+\ln(p-1)+\gamma+\frac{\ln p}{p-1}\right)- \\
&\quad \frac{p+1}{(p-1)^2}\ln p+O\left(\frac{\ln^2(xp)}{x\ln^2 p}\right) \\
&= \frac{1}{p-1}\left[\ln x+\ln(p-1)+\gamma-\frac{p}{p-1}\ln p\right]+O\left(\frac{\ln^2(xp)}{x\ln^2 p}\right).
\end{aligned}
$$

于是完成了定理的证明.

特别地, 当 $p=2,\,3$ 时就有下面的

推论 5.5.1 对任意实数 $x\ge 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{S_2(n)}=\ln x+\gamma-2\ln 2+O\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right)$$

及

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{S_3(n)}=\frac{1}{2}\left[\ln x+\ln 2+\gamma-\frac{3}{2}\ln 3\right]+O\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right).$$

5.6 一个关于原数函数 $S_p(n)$ 的恒等式

上节研究了原数函数 $S_p(n)$ 的倒数均值问题, 在本节里要运用初等方法研究原数函数 $S_p(n)$ 关于无 k 次幂因子数集的算术性质, 并得到一个恒等式.

为了完成本节定理的证明, 首先需要一个简单的引理, 即

引理 5.6.1 如果 $n\ge 1$, 我们有

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\left[\frac{1}{n}\right]=\begin{cases}1 & n=1;\\ 0 & n>1.\end{cases}$$

这里 $\mu(d)$ 为Möbius函数.

证明: 参阅文献 [4] 中定理 2.1.

引理 5.6.2 设 p 为任意给定的素数, 那么对任意正整数 $k\ge 1$ 及复数 s, 且 $\Re s>1$, 有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_p^s(kn)}=\frac{1}{p^{ks}-1}\zeta(s),$$

这里 $\mu(d)$ 为Möbius函数.

证明: 令 $m = S_p(kn)$. 若 $p^a \parallel m$, 那么在序列 $S_p(kn)$ 中恰好有 $[\frac{a}{k}]$ 个 n, 它们满足 $m = S_p(kn)$, 亦即 m 在级数中重复 $[\frac{a}{k}]$ 次. 注意到序列 $S_p(kn)(n = 1, 2, \cdots)$ 是素数 p 的倍数, 所以有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_p^s(kn)} &= \sum_{\substack{m=1\\ p^a\|m}}^{\infty}\frac{[\frac{a}{k}]}{m^s} = \sum_{\beta=1}^{\infty}\sum_{\gamma=0}^{k-1}\sum_{\substack{m=1\\ p^{\beta k+\gamma}\|m}}^{\infty}\frac{\beta}{m^s}\\ &= \sum_{\beta=1}^{\infty}\sum_{\gamma=0}^{k-1}\sum_{\substack{n=1\\ (n,p)=1}}^{\infty}\frac{\beta}{n^s p^{(\beta k+\gamma)s}} = \sum_{\beta=1}^{\infty}\frac{\beta}{p^{\beta ks}}\sum_{\gamma=0}^{k-1}\frac{1}{p^{\gamma s}}\sum_{\substack{n=1\\ (n,p)=1}}^{\infty}\frac{1}{n^s}.\end{aligned}$$

因为

$$\sum_{\substack{n=1\\ (n,p)=1}}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} - \sum_{\substack{n=1\\ p|n}}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{p^s m^s} = \left(1-\frac{1}{p^s}\right)\zeta(s),$$

$$\sum_{\gamma=0}^{k-1}\frac{1}{p^{\gamma s}} = \frac{1-\frac{1}{p^{sk}}}{1-\frac{1}{p^s}},$$

和

$$\sum_{\beta=1}^{\infty}\frac{\beta}{p^{\beta s}} = \frac{p^s}{(p^s-1)^2}.$$

我们立即得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_p^s(kn)} = \frac{1}{p^{ks}-1}\zeta(s),$$

于是完成了引理的证明.

定理 5.6.1 设 p 为任意给定的素数，那么对任意正整数 $k>1$ 和 $Re(s)>1$ 的复数 s, 我们有恒等式

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in\mathscr{A}(k)}}^{\infty}\frac{1}{S_p^s(n)} = \zeta(s)\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{p^{d^k s}-1}.$$

这里 $\mathscr{A}(k)$ 为无 k 次幂因子数，$\mu(d)$ 为Möbius函数，$\zeta(s)$ 为Riemann zeta-函数.

证明: 由序列 $S_p(n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 是素数 p 的倍数，并且注意到引理 5.6.1 及 5.6.2 的结论，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n=1\\ n\in\mathscr{A}(k)}}^{\infty}\frac{1}{S_p^s(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{d^k|n}\mu(d)}{S_p^s(n)}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{S_p^s(d^km)}\\ &= \sum_{d=1}^{\infty}\mu(d)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{S_p^s(d^km)}\\ &= \sum_{d=1}^{\infty}\mu(d)\frac{\zeta(s)}{p^{d^ks}-1}\\ &= \zeta(s)\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{p^{d^ks}-1}.\end{aligned}$$

于是完成了定理的证明.

特别地, 在上式中取 $k=2$, 即对无平方因子数 $\mathscr{A}(2)$, 我们有下列的

推论 5.6.1 设 p 为任意给定的素数，那么对 $Re(s)>1$ 的复数 s, 我们有恒等式

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in\mathscr{A}(2)}}^{\infty}\frac{1}{S_p^s(n)}=\zeta(s)\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{p^{d^2s}-1}.$$

5.7 一个包含 Smarandache 原数函数的方程

前两节主要研究了 Smarandache 原数函数的性质, 本节将要利用初等方法研究一个包含 Smarandache 原数函数的方程

$$S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)=S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

的可解性, 并给出了该方程的所有正整数解.

首先, 我们引入下面的

引理 5.7.1 对任意正整数 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 且 $(m_1,m_2,\cdots,m_n)=1$, 我们有

$$m_1!m_2!\cdots m_n!\mid(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!.$$

证明: 因为 $(m_1,m_2,\cdots,m_n)=1$, 所以存在整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 使得

$$a_1m_1+a_2m_2+\cdots+a_nm_n=1.$$

所以上式两边乘以 $(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!$ 可得

$$\begin{aligned}
& a_1m_1(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!+a_2m_2(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!+\\
& \cdots+a_nm_n(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!\\
= & (m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!. \qquad (5\text{-}12)
\end{aligned}$$

注意到

$$(m_1-1)!m_2!\cdots m_n!|(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!$$

所以

$$m_1!m_2!\cdots m_n! \mid (m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!m_1.$$

同理可得

$$m_1!m_2!\cdots m_n! \mid (m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!m_2.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_1!m_2!\cdots m_n! \mid (m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!m_n.$$

结合 (5-12) 我们有

$$m_1!m_2!\cdots m_n! \mid (m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!.$$

这样便证明了引理.

引理 5.7.2 设 n 是正整数, p 是素数, 满足 $p^\alpha \parallel n!$. 那么

$$\alpha=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right].$$

证明: 参阅文献 [7] 中第一章定理 2.

定理 5.7.1 令 p 为给定的素数, n 为任意正整数. 则方程

$$S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)=S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \qquad (5\text{-}13)$$

有有限个解. 它们是 $n=1,2,\cdots,\left[\dfrac{\sqrt{8p+1}-1}{2}\right]$, 此处 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

证明: 首先, 由 $S_p(k)$ 的定义可知, 当且仅当 $k\le p$ 时 $S_p(k)=pk$. 如果 $k>p$, 则 $S_p(k)<pk$. 因此假如 $\dfrac{n(n+1)}{2}\le p$, 即 $1\le n\le\left[\dfrac{\sqrt{8p+1}-1}{2}\right]$, 此处 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 那么

$$S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)}{2}p. \qquad (5\text{-}14)$$

注意到 $\left[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}\right] \le p$, 因此当 $1 \le n \le \left[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}\right]$ 时,

$$S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)=p+2p+\cdots+np=\frac{n(n+1)}{2}p. \tag{5-15}$$

结合 (5-13) 及 (5-14), 我们容易得到 $n=1,2,\cdots,\left[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}\right]$ 是方程 (5-13) 的解.

如果 $\left[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}\right] < n \le p$, 则 $\frac{n(n+1)}{2} > p$, 那么

$$S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) < \frac{n(n+1)}{2}p,$$

然而

$$S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)=\frac{n(n+1)}{2}p.$$

此时方程 (5-13) 无解.

如果 $n=p+1$, 则

$$S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)=p+2p+\cdots+p\cdot p+(p-1)\cdot p=\frac{p(p+3)}{2}p.$$

则当 $p=2$ 时,

$$S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)=S_2(1)+S_2(2)+S_2(3)=\frac{2(2+3)}{2}2=10,$$

而

$$S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=S_2(6)=8<10.$$

所以此种情况下方程 (5-13) 无解.

当 $p=3$ 时,

$$\begin{aligned} S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n) &= S_3(1)+S_3(2)+S_3(3)+S_3(4) \\ &= \frac{3(3+3)}{2}3=27, \end{aligned}$$

而 $S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=S_3(10)=24<27$. 所以此种情况下方程 (5-13) 也无解.

当 $p>3$ 时, 考虑到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{\frac{(p^2+3p-2)}{2}p}{p^i}\right] &= \frac{p^2+3p-2}{2}+\left[\frac{p^2+3p-2}{2p}\right] \\ &= \frac{p^2+3p-2}{2}+\frac{p+1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{p^2+4p-1}{2} \\ &\geq \frac{(p+1)(p+2)}{2}, \end{aligned}$$

所以

$$S_p\left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}\right) \leq \frac{(p^2+3p-2)}{2}p < \frac{p(p+3)}{2}p.$$

即

$$S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n) > S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

从而 $n=p+1$ 不是方程 (5-13) 的解.

如果 $n \geq p+2$, 那么总存在 $m_i \leq i$, $(i=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$S_p(1)=m_1p, \quad S_p(2)=m_2p, \quad \cdots, \quad S_p(n)=m_np.$$

所以

$$\begin{aligned} S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n) &= m_1p+m_2p+\cdots+m_np \\ &= (m_1+m_2+\cdots+m_n)p. \end{aligned} \tag{5-16}$$

事实上, 我们有 $m_1=1, m_2=2, \cdots, m_p=p$. 并且由 $S_p(n)$ 的定义, 我们有

$$j \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_jp}{p^i}\right], \qquad (1 \leq j \leq n). \tag{5-17}$$

另一方面, 注意到 $m_{p+1}=p$, $m_{p+2}=p+1$, 所以 $m_p, m_{p+1}, \cdots, m_n$ 互素, 当 $p>2$ 时, 利用 Gauss 取整函数 $[x]$ 的性质并结合引理 5.7.1, 5.7.2 及 (5-17) 我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(m_1+m_2+\cdots+m_n)p-1}{p^i}\right] \\ = \;& m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{(m_1+m_2+\cdots+m_n)p-1}{p^i}\right] \\ = \;& m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)p+p-1}{p^i}\right] \\ = \;& m_1+m_2+\cdots+m_n-1 \\ &+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{\frac{p(p-1)}{2}p+p-1+(m_p+m_{p+1}+\cdots+m_n-1)p}{p^i}\right] \\ \geq \;& m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{\frac{p^2(p-1)}{2}+p-1}{p^i}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_p+m_{p+1}+\cdots+m_n-1}{p^i}\right]\\
\geq\ & m_1+m_2+\cdots+m_n+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_p+m_{p+1}+\cdots+m_n-1}{p^i}\right]\\
\geq\ & \left(m_p+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_p}{p^i}\right]\right)+\left(m_{p+1}+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_{p+1}}{p^i}\right]\right)+\cdots+\left(m_n+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_n}{p^i}\right]\right)\\
&+m_1+m_2+\cdots+m_{p-1}\\
=\ & \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_1p}{p^i}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_2p}{p^i}\right]+\cdots+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_np}{p^i}\right]\\
\geq\ & 1+2+\cdots+n\\
=\ & \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

也就是说

$$p^{\frac{n(n+1)}{2}} \mid ((m_1+m_2+\cdots+m_n)p-1)!,$$

因此

$$
\begin{aligned}
S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) &\leq (m_1+m_2+\cdots+m_n)p-1\\
&< (m_1+m_2+\cdots+m_n)p. \qquad (5\text{-}18)
\end{aligned}
$$

结合 (5-16), (5-18) 可得到

$$S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)>S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

当 $p=2$ 时, 同理于上面的分析我们容易得到

$$S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)>S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

所以, 当 $n\geq p+2$ 时方程 (5-13) 无解.

综合以上各种情况, 我们完成了定理的证明.

特别对 $p=3,\ 5,\ 7$, 有下面的

推论 5.7.1 方程

$$S_3(1)+S_3(2)+\cdots+S_3(n)=S_3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

的所有正整数解为 $n=1,\ 2$.

推论 5.7.2 方程

$$S_5(1)+S_5(2)+\cdots+S_5(n)=S_5\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

的所有正整数解为 $n=1,\ 2$.

推论 5.7.3 方程

$$S_7(1)+S_7(2)+\cdots+S_7(n)=S_7\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

的所有正整数解为 $n=1,\ 2,\ 3$.

5.8 关于 Smarandache ceil 函数的一个方程

在本节中, 我们要利用初等方法研究一个关于 Smarandache ceil 函数的方程, 并得到该方程的所有正整数解. Smarandache ceil 函数也是由 F.Smarandache 教授提出来的, 首先我们给出该函数的定义.

定义 5.8.1 对固定的正整数 k 以及任意正整数 n, Smarandache ceil 函数定义为

$$S_k(n)=\min\{m\in N: n\mid m^k\}.$$

定理 5.8.1 对于任意正整数 n 及给定的整数 $k\geq 2$, 方程

$$S_k(1)+S_k(2)+\cdots+S_k(n)=S_k(1+2+\cdots+n), \tag{5-19}$$

有且仅有 $n=1,\ 2,\ 3$ 三个正整数解.

证明: 注意到

$$S_k(1)=1,\ S_k(2)=2,\ S_k(3)=3 \quad 及 \quad S_k(6)=6.$$

因此容易验证 $n=1,\ 2,\ 3$ 是方程 (5-19) 的解.

当 $n\geq 4$ 时, 若 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 无大于 1 的平方因子, 则

$$S_k(1+2+\cdots+n)=S_k(\frac{n(n+1)}{2})=\frac{n(n+1)}{2},$$

而 $S_k(n)\leq n$ 且 $S_k(4)=2$, 故有

$$S_k(1)+S_k(2)+\cdots+S_k(n)<S_k(1+2+\cdots+n),$$

即此时方程无解.

若 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 有大于 1 的平方因子, 则

$$S_k(1+2+\cdots+n)\leq\frac{n(n+1)}{4}.$$

设 A 为无大于 1 的平方因子的数的集合, 则

$$\begin{aligned} S_k(1)+S_k(2)+\cdots+S_k(n) &\geq \sum_{\substack{a\leq n\\ a\in A}} S_k(a)=\sum_{\substack{a\leq n\\ a\in A}} a=\sum_{a\leq n} a|\mu(a)|=\sum_{a\leq n} a\sum_{d^2|a}\mu(d)\\ &= \sum_{d^2u\leq n} d^2u\mu(d)=\sum_{d^2\leq n} d^2\mu(d)\sum_{u\leq \frac{n}{d^2}} u\\ &= \sum_{d\leq\sqrt{n}} d^2\mu(d)\cdot\frac{\left[\frac{n}{d^2}\right]\left(\left[\frac{n}{d^2}\right]+1\right)}{2}, \end{aligned}$$

利用 $[x]=x-\{x\}$, 可以得到

$$\begin{aligned} & S_k(1)+S_k(2)+\cdots+S_k(n)\\ \geq & \sum_{d\leq\sqrt{n}} d^2\mu(d)\left(\frac{n^2}{2d^4}-\frac{n}{d^2}\left\{\frac{n}{d^2}\right\}+\frac{n}{2d^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{n}{d^2}\right\}^2-\frac{1}{2}\left\{\frac{n}{d^2}\right\}\right)\\ = & \frac{n^2}{2}\sum_{d\leq\sqrt{n}}\frac{\mu(d)}{d^2}-n\sum_{d\leq\sqrt{n}}\mu(d)\left\{\frac{n}{d^2}\right\}+\frac{n}{2}\sum_{d\leq\sqrt{n}}\mu(d)+\\ & \frac{1}{2}\sum_{d\leq\sqrt{n}} d^2\mu(d)\left\{\frac{n}{d^2}\right\}-\frac{1}{2}\sum_{d\leq\sqrt{n}} d^2\mu(d)\left\{\frac{n}{d^2}\right\}\\ \geq & \frac{n^2}{2}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}-\frac{n^2}{2}\sum_{d>\sqrt{n}}\frac{\mu(d)}{d^2}-n\sqrt{n}-\frac{n\sqrt{n}}{2}-\frac{n\sqrt{n}}{2}-\frac{n\sqrt{n}}{2}, \end{aligned}$$

这里我们用到了恒等式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}=\frac{1}{\zeta(2)}=\frac{6}{\pi^2}$, 因而有

$$S_k(1)+S_k(2)+\cdots+S_k(n)\geq\frac{n^2}{2}\cdot\frac{6}{\pi^2}-\frac{5}{2}n^{\frac{3}{2}}=\frac{3n^2}{\pi^2}-\frac{5}{2}n^{\frac{3}{2}}.$$

如果 $\frac{3n^2}{\pi^2}-\frac{5}{2}n^{\frac{3}{2}}>\frac{n^2+n^{\frac{3}{2}}}{4}$ 就有 $\frac{3n^2}{\pi^2}-\frac{5}{2}n^{\frac{3}{2}}>\frac{n(n+1)}{4}$, 即

$$\sqrt{n}>\frac{11\pi^2}{12-\pi^2},$$

可解得 $n>2600$ 满足不等式, 此时

$$S_k(1)+S_k(2)+\cdots+S_k(n)>S_k(1+2+\cdots+n),$$

方程无解.

事实上, 若 $\frac{n(n+1)}{2}$ 有大于或等于 3 的平方因子, 只要验证 n 从 4 到 400 即可, 故当 $4\leq n\leq 2600$ 时, 只要验证 $\frac{n(n+1)}{2}$ 含 2 的平方因子即可, 这样容易验证 n 从 4 到 2600 时, 方程 (5-19) 无解.

因此, 方程 (5-19) 仅有三个正整数解 $n=1,\ 2,\ 3$.

这就完成了定理的证明.

5.9 关于第二类 Smarandache 伪 5 倍数数列

在本节中, 我们将要研究第二类 Smarandache 伪 5 倍数序列的性质问题. 首先给出

定义 5.9.1 *如果一个数本身不是 5 的倍数, 但经过若干次置换后成为 5 的倍数, 这样的数称为第二类 Smarandache 伪 5 倍数数.*

例如: $51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59, 101, 102, 103, 104, 106\ \cdots$ 等数都是第二类伪 5 倍数数. 同样我们可以定义第二类 Smarandache 伪偶数和第二类 Smarandache 伪奇数.

关于第二类 Smarandache 伪 5 倍数序列的性质, 若令 $\mathcal{A}$ 表示第二类 Smarandache 伪 5 倍数数的集合, 令 $\mathcal{B}$ 表示所有第二类 Smarandache 伪偶数的集合, $\mathcal{C}$ 表示所有第二类 Smarandache 伪奇数的集合, 文献 [16] 中给出了

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\le x}} f(n)=\sum_{n\le x} f(n)+O\left(Mx^{\frac{\ln 8}{\ln 10}}\right),$$

这里 $f(n)$ 是任意的算术函数, 并且 $M=\max\{|f(n)|\}$. 取 $f(n)=d(n)$ 或 $\Omega(n)$, 其中 $d(n)$ 是除数函数, $\Omega(n)$ 表示所有 n 的素因子个数, 另外还有结论

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\le x}} d(n)=x\ln x+(2\gamma-1)x+O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}+\varepsilon}\right),$$

其中 γ 表示 Euler 常数, ε 是任意给定的正数, 及

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\le x}} \Omega(n)=x\ln\ln x+Bx+O\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

其中 B 是可计算的常数.

下面我们将利用初等方法研究第二类 Smarandache 伪 5 倍数数的倒数所形成的级数，并得到一个较强的渐近公式.

首先需要下面几个引理

引理 5.9.1 *对任意实数 $x\ge 1$, 有渐近公式*

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}=\ln x+\gamma+O\left(\frac{1}{x}\right),$$

其中 γ 是Euler 常数.

证明: 参阅文献 [4] 中的定理 3.2 .

引理 5.9.2 对任意实数 $x \geq 1$, 令 $\mathcal{D}$ 表示所有十进制数字中各位数字为 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 的自然数的集合. 那么有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{D}\\ n\leq x}} \frac{1}{n} = A + O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}-1}\right),$$

其中 A 是一个可计算的常数.

证明: 从集合 $\mathcal{D}$ 的定义中不难发现, $\mathcal{D}$ 中元素的各位数字为 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 不包含 0 和 5. 所以, 在 $\mathcal{D}$ 中所有的一位数字有 8 个，所有的 2 位数字有 8^2 个，所有的 m 位数字有 8^m 个. 因此, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathcal{D}} \frac{1}{n} &= \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots \\ &< 8+\frac{8^2}{10}+\frac{8^3}{10^2}+\cdots \\ &= 8(1+\frac{8}{10}+\frac{8^2}{10^2}+\cdots) = 40.\end{aligned}$$

这说明了无穷级数 $\sum\limits_{n\in\mathcal{D}} \frac{1}{n}$ 是收敛的. 令 A 表示该级数的值. 又对任意实数 $x \geq 1$, 设正整数 k 满足 $10^k \leq x < 10^{k+1}$. 所以我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\in\mathcal{D}\\ n\leq x}} \frac{1}{n} &= \sum_{n\in\mathcal{D}} \frac{1}{n} - \sum_{\substack{n\in\mathcal{D}\\ n>x}} \frac{1}{n} = A + O\left(\sum_{n\geq k} \frac{8^{n+1}}{10^n}\right) \\ &= A + O\left(\frac{8^{k+1}}{10^k}\left(1+\frac{8}{10}+\frac{8^2}{10^2}+\cdots\right)\right) \\ &= A + O\left(8\times 40\frac{8^{\lg x}}{x}\right) \\ &= A + O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}-1}\right).\end{aligned}$$

这就证明了引理 5.9.2.

定理 5.9.1 对任意实数 $x \geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\leq x}} \frac{1}{n} = \frac{4}{5}\ln x + \frac{4\gamma+\ln 5}{5} - A + O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}-1}\right),$$

其中 A 是一个常数.

证明: 从第二类 Smarandache 伪 5 倍数数的定义和引理 5.9.1 及引理 5.9.2 有

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ n\leq x}} \frac{1}{n} = \sum_{n\leq x} \frac{1}{n} - \sum_{n\leq \frac{x}{5}} \frac{1}{5n} - \sum_{n\in\mathcal{D}} \frac{1}{n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln x+\gamma+O\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{5}\left[\ln\frac{x}{5}+\gamma+O\left(\frac{1}{x}\right)\right]-A+O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}-1}\right)\\
&= \frac{4}{5}\ln x+\frac{4\gamma+\ln 5}{5}-A+O\left(\frac{1}{x}\right)+O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}-1}\right)\\
&= \frac{4}{5}\ln x+\frac{4\gamma+\ln 5}{5}-A+O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}-1}\right).
\end{aligned}
$$

这就证明了定理 5.9.1. 利用同样的方法便可以证明下面的定理 5.9.2 和定理 5.9.3.

定理 5.9.2 对任意实数 $x\geq 1$, 有渐近公式

$$
\sum_{\substack{n\in\mathcal{B}\\ n\leq x}}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\ln x+\frac{\gamma+\ln 2}{2}-B+O\left(x^{-\lg 2}\right),
$$

其中 B 是一个常数.

定理 5.9.3 对任意实数 $x\geq 1$, 有渐近公式

$$
\sum_{\substack{n\in\mathcal{C}\\ n\leq x}}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\ln x+\frac{\gamma+\ln 2}{2}-C+O\left(x^{-\lg 2}\right),
$$

其中 C 是一个常数.

5.10 关于多组组合数的一个渐近公式

如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 n 的标准分解式, 素因数个数函数 $\Omega(n)$ 定义为 $\Omega(n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$. 显然 $\Omega(n)$ 为一个完全可加函数. 另外, 对于给定的自然数 n 和 k, 若把 kn 个不同的元素分成 k 组, 每组都有 n 个不同的元素, 这样分组的种数为 $C_{kn}^{(k)}=\dfrac{(kn)!}{(n!)^k}$.

本节要利用初等方法研究这种多组组合数 $C_{kn}^{(k)}$(参阅文献 [15]) 在 $\Omega(n)$ 函数上的值的分布性质, 并且得到一个较强的渐近公式.

首先需要引入几个引理.

引理 5.10.1 m 为任意给定的正整数, 有渐近公式

$$
\sum_{p\leq m}\frac{1}{\ln p}=\frac{m}{\ln^2 m}+O\left(\frac{m}{\ln^3 m}\right), \tag{5-20}
$$

其中 p 表示素数.

证明: 利用 Abel 恒等式 (参阅文献 [4]), 有

$$
\sum_{p\leq m}\frac{1}{\ln p}=\pi(m)\frac{1}{\ln m}+\int_2^m \pi(t)\frac{1}{t\ln^2 t}dt,
$$

其中 $\pi(m)$ 表示不大于 m 的素数的个数. 注意到

$$\pi(m)=\frac{m}{\ln m}+O\left(\frac{m}{\ln^2 m}\right),$$

有

$$\sum_{p\le m}\frac{1}{\ln p}=\frac{m}{\ln^2 m}+O\left(\frac{m}{\ln^3 m}\right).$$

这样便证明了引理.

引理 5.10.2 m 为任意给定的正整数, 有渐近公式

$$\sum_{p\le m}\frac{1}{p}=\ln\ln m+A+O\left(\frac{1}{\ln m}\right), \tag{5-21}$$

其中 A 为可计算的常数.

证明: 参阅文献 [17] 中的定理 5.9.2.

引理 5.10.3 m 为任意给定的正整数, 我们有渐近公式

$$\Omega(m!)=m\ln\ln m+(A+B)m+O\left(\frac{m}{\ln m}\right), \tag{5-22}$$

其中 A,B 为可计算的常数.

证明: 设 $m!=\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$, 则

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p_i^j}\right],$$

其中 [m] 表示不大于 m 的最大整数. 那么我们有

$$\begin{aligned}
\Omega(m!) &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p_i^j}\right]=\sum_{p\le m}\sum_{j=1}^{\left[\frac{\ln m}{\ln p}\right]}\left[\frac{m}{p^j}\right]\\
&= \sum_{p\le m}\sum_{j=1}^{\left[\frac{\ln m}{\ln p}\right]}\frac{m}{p^j}+O\left(\sum_{p\le m}\frac{\ln m}{\ln p}\right)\\
&= m\sum_{p\le m}\frac{1}{p-1}-m\sum_{p\le m}\frac{1}{p^{\left[\frac{\ln m}{\ln p}\right]}(p-1)}+O\left(\sum_{p\le m}\frac{\ln m}{\ln p}\right)\\
&= m\sum_{p\le m}\frac{1}{p-1}+O\left(\sum_{p\le m}\frac{\ln m}{\ln p}\right)\\
&= m\left(\sum_{p\le m}\frac{1}{p}+\sum_{p\le m}\frac{1}{p(p-1)}\right)+O\left(\sum_{p\le m}\frac{\ln m}{\ln p}\right).
\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{p\le m}\frac{1}{p(p-1)}=\sum_{p}\frac{1}{p(p-1)}-\sum_{p>m}\frac{1}{p(p-1)}=B+O\left(\frac{1}{m}\right), \tag{5-23}$$

其中 $B=\sum\limits_{p}\frac{1}{p(p-1)}$ 为一常数. 结合 (5-23) 式及引理 5.10.1 和引理 5.10.2, 我们有

$$\begin{aligned}\Omega(m!) &= m\left(\ln\ln m+A+O\left(\frac{1}{m}\right)+B+O\left(\frac{1}{m}\right)\right)+O\left(\frac{m}{\ln m}\right)\\ &= m\ln\ln m+(A+B)m+O\left(\frac{m}{\ln m}\right).\end{aligned}$$

这样便完成了引理 5.10.3 的证明.

定理 5.10.1 n,k 为任意给定的正整数, 如果当 $n\to\infty$ 时 $k\to\infty$, 且 $n>k^{\ln k}$, 则我们有渐近公式

$$\Omega\left(C_{kn}^{(k)}\right)=\frac{kn\ln k}{\ln n}+O\left(\frac{kn}{\ln n}\right). \tag{5-24}$$

证明: 利用 Ω 函数的完全可加性以及引理 5.10.3, 我们得到

$$\begin{aligned}\Omega\left(C_{kn}^{(k)}\right) &= \Omega((kn)!)-k\Omega(n!)\\ &= kn\ln\ln kn-kn\ln\ln n+O\left(\frac{kn}{\ln n}\right)\\ &= kn\ln\left(1+\frac{\ln k}{\ln n}\right)+O\left(\frac{kn}{\ln n}\right)\\ &= kn\left(\frac{\ln k}{\ln n}+O\left(\frac{\ln^2 k}{\ln^2 n}\right)\right)+O\left(\frac{kn}{\ln n}\right).\end{aligned}$$

注意到 $n\to\infty$ 时 $k\to\infty$, 且 $n>k^{\ln k}$, 即 $\ln n>(\ln k)^2$, 则我们有

$$\Omega\left(C_{kn}^{(k)}\right)=\frac{kn\ln k}{\ln n}+O\left(\frac{kn}{\ln n}\right).$$

这样我们便完成了定理的证明.

注：定理中的条件当 $n\to\infty$ 时 $k\to\infty$ 是必不可少的, 因为当 k 取定时, 我们只能得到上界估计, 而不能得到渐近公式.

第六章 有待解决的问题

1. 对于任意正整数 n, 著名的 F.Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n|m!$. 即就是 $S(n)=\min\{m:\ m\in N,\ n|m!\}$. 关于函数 $S(n)$, 下列两个问题有待解决：

问题一：当 $n>1$ 且 $n\neq 8$ 时，和式 $\displaystyle\sum_{d|n}\frac{1}{S(d)}$ 不可能为正整数；

问题二：研究方程 $\displaystyle\sum_{d|n}S(d)=\phi(n)$ 的可解性，并寻求该方程的所有正整数解, 其中 $\phi(n)$ 为 Euler 函数.

2. 对于任意正整数 n, F.Smarandache LCM 函数定义为最小的正整数 k 使得 $n|[1,\ 2,\ \cdots,k]$, 其中 $[1,\ 2,\ \cdots,\ k]$ 为 1, 2, $\cdots$, k 的最小公倍数。关于函数 $SL(n)$, 下列三个问题有待解决：

问题三：当 $n>1$ 且 $n\neq 36$ 时，和式 $\displaystyle\sum_{d|n}\frac{1}{SL(d)}$ 不可能为正整数；

问题四：研究方程 $\displaystyle\sum_{d|n}SL(d)=\phi(n)$ 的可解性，并寻求该方程的所有正整数解；

问题五：研究 $\ln SL(n)$ 的均值性质, 并给出 $\displaystyle\sum_{n\leq x}\ln SL(n)$ 的渐近公式。

3. 对于任意正整数 n, 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式, 我们定义函数 $\bar{S}(n)=\max\{\alpha_1p_1,\ \alpha_2p_2,\cdots,\alpha_kp_k\}$. 关于函数 $\bar{S}(n)$, 下列两个问题有待解决：

问题六：当 $n>1$ 且 $n\neq 24$ 时，和式 $\displaystyle\sum_{d|n}\frac{1}{\bar{S}(d)}$ 不可能为正整数；

问题七：研究方程 $\displaystyle\sum_{d|n}\bar{S}(d)=\phi(n)$ 的可解性，并寻求该方程的所有正整数解。

4. 对于任意正整数 n, F.Smarandache 对偶函数 $S^*(n)$ 定义为最大的正整数 m 使得 $m!|n$. 即就是 $S^*(n)=\max\{m:\ m\in N,\ m!|n\}$. 关于函数 $S^*(n)$ 下列两个问题有待解决：

问题八：研究方程 $\displaystyle\sum_{d|n}S^*(d)=\phi(n)$ 的可解性，并寻求该方程的所有正整数解；

问题九：研究 $\displaystyle\prod_{d|n}S^*(d)$ 的计算问题, 并给出一个确切的计算公式。

5. 对于任意正整数 n, 伪 F.Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最大的正整数 m 使得 $1+2+3+\cdots+m$ 整除 n. 即就是 $Z(n)=\max\{m:\ m\in N,\ \frac{m(m+1)}{2}|n\}$. 关于函数 $Z(n)$, 下列问题有待解决：

问题十：研究 $Z(n)$ 的均值性质, 并给出 $\displaystyle\sum_{n\leq x}Z(n)$ 的渐近公式。

参考文献

[1] C.Ashbacher, On numbers that are pseudo-Smarandache and Smarandache perfect, Smarandache Notions Journal, **15**(2004), 40-42.

[2] Xu Zhefeng, On the Value Distribution of the Smarandache Function，Acta Mathematica Sinica (in Chinese), Vol.49(2006), No.5, 1009-1012.

[3] S. Tabirca, About S-multiplicative functions, Octogon, 1999,7: 169-170.

[4] Tom.M. Apostol, Introduction to analytic number theory, New York: Springer-Verlag, 1976, 77.

[5] P.Erdös, Problem 6674, Amer. Math. Monthly, Vol.98, 1991, 965.

[6] 潘承洞, 潘承彪, 解析数论基础, 科学出版社, 北京, 1999, 202-205.

[7] A.Murthy, Some notions on least common multiples, Smarandache Notions Journal, Vol. 12 (2001), 307-309.

[8] Zhang Wenpeng, Liu Duansen, On the primitive numbers of power p and asymptotic property, Smarandache Notions Journal, Vol. 13(2002), 173-175.

[9] Mark Farris and Patrick Mitchell, Bounding the Smarandache function, Smarandache Notions Journal, Vol. 13 (2002), 37-42.

[10] 潘承洞, 潘承彪, 素数定理的初等证明, 上海科学技术出版社. 1988.

[11] Amarnth Murthy, Generalized Partitions and New Ideas On Number Theory and Smarandache Sequences, Hexis, 2005, 20-22.

[12] 潘承洞, 潘承彪, 初等数论, 北京大学出版社, 北京, 1992.

[13] D.R.Heath-Brown, The differences between consecutive primes. III, Journal, London Math. Soc., (2) 20 (1979), 177-178.

[14] H.N.Shapiro, Introduction to theory of numbers, John Wiley and Sons, 1983, 181.

[15] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 北京, 1977, 25.

[16] Wang Xiaoying, On the Smarandache Pseudo-multiples of 5 sequence, Research on Smarandache Problems in Number theory, Hexis, 2004, 17-19.

[17] 华罗庚, 数论导引, 科学出版社, 北京, 1975, 105.

[18] Liang F. C. and Yi Y, The primitive number of power p and its asymptotic property, Research on Smarandache problems in number theory, Hexis, Phoenix, 2004, 129-131.

[19] C. Ashbacher, Some Properties of the Smarandache-Kurepa and Smarandache-Wagstaff Functions, Mathematics and Informatics Quarterly, 1997, 7: 114-116.

[20] Liu Yaming, On the solutions of an equation involving the Smarandache function, Scientia Magna, Vol.2 (2006), No. 1, 76-79.

[21] Fu Jing, An equation involving the Smarandache function, Scientia Magna, Vol.2 (2006), No.4, 83-86.

[22] F. Smarandache, Only Problems, Not Solutions, Chicago, Xiquan Publishing House, 1993.

[23] C.Ashbacher, On numbers that are pseudo-Smarandache and Smarandache perfect, Smarandache Notions Journal, 15(2004), 40-42.

[24] Yi Yuan, On the primitive numbers of power p and its asymptotic property, Scientia Magna, Vol. 1, 2005: 175-177.

[25] A., Begay, Smarandache Ceil Functions, Bulletin of Pure and Applied Sciences, 1997, 16E: 227-229.

[26] G H.Hardy, E M.Wright, An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ Press, Oxford, 1981.

[27] Ma Jinping, The Smarandache Multiplicative Function, Scientia Magna, Vol.1 (2005), No.1, 125-128.

[28] Li Hailong and Zhao Xiaopeng, On the Smarandache function and the K-th roots of a positive integer, Research on Smarandache problems in number theory, Hexis, 2004, 119-122.

[29] Shejiao Xue, On the Smarandache dual function, Scientia Magna, Vol. 3 (2007), No. 1, 29-32.

[30] M.H.Le, A conjecture concerning the Smarandache dual function, Smarandache Notions Journal, 14(2004), 153-155.

[31] Li Jie, On Smarandache dual functions, Scientia Magna, Vol.2(2006), No.1, 111-113.

[32] Lv Zhongtian, On the F.Smarandache LCM function and its mean value, Scientia Magna, Vol. 3 (2007), No.1, 22-25. [33] Xu Zhefeng, Some new arithmetical functions and their mean value formulas, Mathematics in Practice and Theory (in Chinese), **36**(2006), No. 8, 300-303.

New Progress on Smarandache Problems

Chen Guohui

Department of Mathematics

Hainan Normal University

Haikou, Hainan, 571158

P. R. China

High American Press

2007

责任编辑：张沛

封面设计：张小蹦

本书主要将目前中国学者关于 **Smarandache** 问题的部分研究成果汇编成册,其主要目的在向读者介绍关于 **Smarandache** 问题的一些最新的研究成果,主要包括 **Smarandache** 函数及相关函数的渐近性质、级数收敛问题、特殊方程的解等一系列问题，并提出了关于这些函数的一些新的问题，有兴趣的读者可以对这些问题进行研究，从而开拓读者的视野,引导和激发读者对这些领域的研究兴趣.

This book includes part of the research results about the Smarandache problems written by Chinese scholars at present, and its main purpose is to introduce various results about the Smarandache problems, such as Smarandache function and its asymptotic properties, series convergence, solutions about special equations. At the same time, we put forward to some new interesting problems either in order to research further. We hope this booklet will guide and inspire readers to these fields.

ISBN 1-59973-043-X

53995>

9 781599 730431